Lutz Schröder
Till Mossakowski

Modallogik für Informatiker
Übungsblatt 3

Abgabe 24.07.06, 17:00

Übung 1:

Eine Formel ϕ ist *kanonisch*, wenn für jede normale modale Logik Λ aus $\vdash_\Lambda \phi$ folgt, dass ϕ im kanonischen Rahmen für Λ gültig ist.

Eine Formel ϕ ist *kanonisch für eine Eigenschaft* P, wenn

- der kanonische Rahmen für jede normale Modallogik Λ mit $\vdash_\Lambda \phi$ die Eigenschaft P hat, und
- ϕ in allen Rahmen mit Eigenschaft P gilt.

(a) Eine binäre Relation R ist *Church-Rosser*, wenn aus aRb und aRc folgt: es gibt ein d mit bRd und cRd.

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
b \arrow[dr, dotted] & & c \arrow[dl, dotted] \\
& d &
\end{tikzcd}$$

Beweise, dass $\Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$ kanonisch für die Church-Rosser-Eigenschaft ist.

(b) Zeige, dass das Induktionsaxiom

$$[\pi^*](p \rightarrow [\pi]p) \rightarrow (p \rightarrow [\pi^*]p)$$

nicht kanonisch ist.

12 P.

Übung 2:

Sei $\Sigma(\phi)$ die Menge der Teilformeln einer Formel ϕ.

Lemma: Eine Formel ϕ ist erfüllbar, gdw wenn es eine Hintikka-Menge H in $\Sigma(\phi)$ gibt, die ϕ enthält, so dass alle maximalen Forderungen von H erfüllbar sind. Fur jede Formel $\Diamond\psi \in H$ besteht die *maximale Forderung für* $\Diamond\psi$ aus ψ und allen Formeln χ mit $\Box\chi \in H$.

Implementiere (vorzugsweise in Haskell) einen Algorithmus, der Erfüllbarkeit in **K** entscheidet, indem er alle Hintikka-Mengen durchgeht, und für jede solche für alle maximalen Forderungen rekursiv deren Erfüllbarkeit feststellt.

12 P.

Beispiele von Formeln, die in **K** erfüllbar sind:

- $M : \Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$
- $C : (\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$
- $R : \Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$
- $K : \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$
- $N : \Box\top$
- $\neg B : \neg(p \rightarrow \Box\Diamond p)$
- $\neg D : \neg(\Box p \rightarrow \Diamond p)$
- $\neg T : \neg(\Box p \rightarrow p)$
- $4 : \Box p \rightarrow \Box\Box p$
- $\neg 4 : \neg(\Box p \rightarrow \Box\Box p)$
- $\neg 5 : \neg(\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p)$
- $G1 : \Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$
- $\neg G1 : \neg(\Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p)$
- $Empty : \Box\bot$
- $\neg Empty : \neg\Box\bot$
- $Progress : \Diamond\top$
- $\neg Progress : \neg\Diamond\top$

Beispiele von Formeln, die in **K** nicht erfüllbar sind:

- $\neg M : \neg(\Box(p \land q) \to (\Box p \land \Box q))$
- $\neg C : \neg((\Box p \land \Box q) \to \Box(p \land q))$
- $\neg R : \neg(\Box(p \land q) \leftrightarrow (\Box p \land \Box q))$
- $\neg K : \neg(\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q))$
- $\neg N : \neg\Box\top$
- $\neg(\Diamond(p \lor q) \leftrightarrow (\Diamond p \lor \Diamond q))$
- $\Diamond\bot$
- $\Diamond\top \land \Box\bot$
- $\neg((\Box p \land \Diamond q) \to \Diamond(p \land q))$
- $\Box p \land \Diamond q \land \neg\Diamond(p \land q)$
- $\Diamond(\Box p \land \Diamond q \land \neg\Diamond(p \land q))$
- $\Box(\Box p \land \Diamond q) \land \Diamond\Box q \land \neg\Diamond\Box(p \land q)$
- $\Box\Box p \land \Diamond\Box q \land \neg\Diamond\Box(p \land q)$
- $\Box p \land \Diamond\top \land \neg\Diamond p$
- $\Box r \land \Diamond(\Box(p \to q) \to \Box p \to \Box q) \land \neg\Diamond r$

Achtung: $\to$ ist rechtsassoziativ, d.h. $p \to q \to r$ ist $p \to (q \to r)$.