

Lutz Schröder
Till Mossakowski

Modallogik für Informatiker Übungsblatt 3

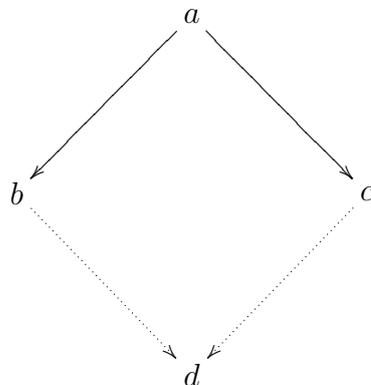
Abgabe 24.07.06, 17:00

Übung 1:

Eine Formel ϕ ist *kanonisch*, wenn für jede normale modale Logik Λ aus $\vdash_{\Lambda} \phi$ folgt, dass ϕ im kanonischen Rahmen für Λ gültig ist.

Eine Formel ϕ ist *kanonisch für eine Eigenschaft P* , wenn

- der kanonische Rahmen für jede normale Modallogik Λ mit $\vdash_{\Lambda} \phi$ die Eigenschaft P hat, und
 - ϕ in allen Rahmen mit Eigenschaft P gilt.
- (a) Eine binäre Relation R ist *Church-Rosser*, wenn aus aRb und aRc folgt: es gibt ein d mit bRd und cRd .



Beweise, dass $\diamond\Box p \rightarrow \Box\diamond p$ kanonisch für die Church-Rosser-Eigenschaft ist.

- (b) Zeige, dass das Induktionsaxiom

$$[\pi^*](p \rightarrow [\pi]p) \rightarrow (p \rightarrow [\pi^*]p)$$

nicht kanonisch ist.

12 P.

Übung 2:

Sei $\Sigma(\phi)$ die Menge der Teilformeln einer Formel ϕ .

Lemma: Eine Formel ϕ ist erfüllbar, gdw wenn es eine Hintikka-Menge H in $\Sigma(\phi)$ gibt, die ϕ enthält, so dass alle maximalen Forderungen von H erfüllbar sind. Für jede Formel $\Diamond\psi \in H$ besteht die *maximale Forderung* für $\Diamond\psi$ aus ψ und allen Formeln χ mit $\Box\chi \in H$.

Implementiere (vorzugsweise in Haskell) einen Algorithmus, der Erfüllbarkeit in \mathbf{K} entscheidet, indem er alle Hintikka-Mengen durchgeht, und für jede solche für alle maximalen Forderungen rekursiv deren Erfüllbarkeit feststellt.

12 P.

Beispiele von Formeln, die in \mathbf{K} erfüllbar sind:

- $M : \Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$
- $C : (\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$
- $R : \Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$
- $K : \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$
- $N : \Box\top$
- $\neg B : \neg(p \rightarrow \Box\Diamond p)$
- $\neg D : \neg(\Box p \rightarrow \Diamond p)$
- $\neg T : \neg(\Box p \rightarrow p)$
- $4 : \Box p \rightarrow \Box\Box p$
- $\neg 4 : \neg(\Box p \rightarrow \Box\Box p)$
- $\neg 5 : \neg(\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p)$
- $G1 : \Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$
- $\neg G1 : \neg(\Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p)$
- $Empty : \Box\perp$
- $\neg Empty : \neg\Box\perp$
- $Progress : \Diamond\top$
- $\neg Progress : \neg\Diamond\top$

Beispiele von Formeln, die in \mathbf{K} nicht erfüllbar sind:

- $\neg M : \neg(\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q))$
- $\neg C : \neg((\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q))$
- $\neg R : \neg(\Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q))$
- $\neg K : \neg(\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q))$
- $\neg N : \neg\Box\top$
- $\neg(\Diamond(p \vee q) \leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q))$
- $\Diamond\perp$
- $\Diamond\top \wedge \Box\perp$
- $\neg((\Box p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q))$
- $\Box p \wedge \Diamond q \wedge \neg\Diamond(p \wedge q)$
- $\Diamond(\Box p \wedge \Diamond q \wedge \neg\Diamond(p \wedge q))$
- $\Box(\Box p \wedge \Diamond q) \wedge \Diamond\Box q \wedge \neg\Diamond\Box(p \wedge q)$
- $\Box\Box p \wedge \Diamond\Box q \wedge \neg\Diamond\Box(p \wedge q)$
- $\Box p \wedge \Diamond\top \wedge \neg\Diamond p$
- $\Box r \wedge \Diamond(\Box(p \rightarrow q) \rightarrow \Box p \rightarrow \Box q) \wedge \neg\Diamond r$

Achtung: \rightarrow ist rechtsassoziativ, d.h. $p \rightarrow q \rightarrow r$ ist $p \rightarrow (q \rightarrow r)$.