Mitschrift: Modallogik

Daniel Rippel

18. Juli 2006

Veranstaltung an der Universität Bremen
Sommersemester 2006
Veranstalter:
Schröder, Lutz
Mossakowski, Till

Inhaltsverzeichnis

1 Dienstag, 25.04.06

1.1 Semantik

1.1.1 Relationale Strukturen

Recall: Relationen: n-stelligne Relationen auf Menge X ist Teilmenge $R \subset X^n$ (Kreuzprodukt über X.

2 stellige Relation $(x, y) \in R \Leftrightarrow xRy$
R reflexiv wenn $\forall x \in X : xRx$
R transitiv wenn $\forall x, y, z \in X.xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

$\mathfrak{a}$ Menge von Mengen, dann ist $\bigcap \mathfrak{a} = \{x | \forall A \in \mathfrak{a}.x \in A\}$
Beispiel: $n\mathbb{Z} = \{n \cdot k | k \in \mathbb{Z}\}$
$\bigcap\{(\mathbb{Z}n\mathbb{Z}) \cup \{n\} | n \in \mathbb{N}_{>1}\} = \mathbb{P}\}$
$\bigcap \mathfrak{a} = \{x | \exists A \in \mathfrak{a}.x \in A\}$

Definition: Eine Relationale Struktur $\mathfrak{F} = (W, R_1, R_2, \ldots)$ besteht aus

- Einer Menge W von Welten/Zuständen/Punkten/Zeitpunkten/Situationen/Knoten/...
- Einer Familie von n_i stelligen Relationen R_i auf W

1.1.2 Beispiele:

Ordungen: (W, R) R ist binär

R irreflexiv $\Leftrightarrow \forall x.\neg xRx$

R antisymmetrisch $\Leftrightarrow \forall x, y.xRy \wedge yRx \rightarrow x = y$

R ist partielle Ordnung gdw. R reflexiv, transitiv und antisymmetrisch.
R ist totale Ordnung gdw. R partielle Ordnung und $\forall x, y.xRy \vee yRx$.
R ist strikte partelle Ordnung gdw. R irreflexiv und transitiv ist.
R ist strikte totale Ordnung gdw. R strikte partielle Ordnung und $\forall x, y.xRy \vee yRx \vee x = y$ (Trichotomie).

Beispiele siehe Buch

Bäume:

Definition: R ist binäre Relation

Transitive Abschluß R^+ von R

$$R^+ = \bigcap\{R' | R' \subseteq W \times W, transitiv, R \subseteq R'\}$$

Reflexiv Transitiver Abschluß R^* von R

$$R^* = \bigcap\{R' | R' \subseteq W \times W, reflexiv, transitiv, R \subseteq R'\}$$

Satz: R^+ ist die kleinste transitive Relation in der R enthalten ist. Es gilt:

$$R^+ = \{(x,y)|\exists n\exists x_0,\ldots,x_{n+1}.x_0 = x \wedge x_{n+1} = y \wedge \forall i = 0,\ldots,n.x_iRx_{i+1}\}$$
$$R^* = \{(x,y)|\exists n\exists x_0,\ldots,x_n.x_0 = x \wedge x_n = y \wedge \forall i = 0,\ldots,(n-1).x_iRx_{i+1}\}$$
$$= R^+ \cup \Delta;\ \Delta = \{(x,x)|x \in W\}$$

Ein Baum ist eine relationale Struktur mit:

(i) Es existiert eine eindeutige Wurzel $r \in W$ mit $\forall x \in W.rR^+x$
(Jedes Kind stammt in endl. vielen Schritten von r ab.)

(ii) Alle Knoten ausser der Wurzel haben eindeutige Vorgänger.
D.h. für alle $x \neq r$ existiert ein eind. y mit yRx.

(iii) R ist azyklisch. D.h. $\forall x.\neg xR^+x$.

2 Dienstag, 02.05.06

2.1 Kripke Semantik der Modallogik

Modale Basissprache nur mit $\Box, \Diamond$.

Grammatik $\varphi ::= p \in \Phi(\text{prop.Var})|\bot|\neg\varphi|\varphi_1 \wedge \varphi_2|\Box\varphi$
mit
$\top :\equiv \neg\bot$
$\varphi \vee \psi :\equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
$\varphi \to \psi :\equiv \neg\varphi \vee \psi$
$\varphi \leftrightarrow \psi :\equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$
$\Diamond\varphi :\equiv \neg\Box\neg\varphi$

Definition: Ein (Kripke) Rahmen (für die modale Basissprache) ist eine relationale Struktur $\mathfrak{F} = (W, R)$ mit R ist binär ($R \subset W \times W$)

Ein Krupke Modell der modalen Basissprache $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ besteht aus einem Rahmen $\mathfrak{F}$ und einer Validation V, d.h. einer Abbildung $V : \Phi \to \mathfrak{P}(w)$ ($\mathfrak{P}$ Potenzmenge)

$V(p)$: Menge aller Welten in denen p Wahr ist.

$\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ basiert auf Rahmen $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F}$ ist der unterliegenede Rahmen)

2.2 Erfülltheit von Formeln

2.2.1 Welten:

$\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V) = ((W, R), V)$

$\mathfrak{M}, w \models \varphi$ rekursiv definiert:
$\mathfrak{M}, w \models p$ gdw. $w \in V(p)$
$\mathfrak{M}, w \not\models \bot$

$\mathfrak{M}, w \models \neg\varphi$ gdw. $\mathfrak{M}, w \not\models \varphi$
$\mathfrak{M}, w \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ gdw. $\mathfrak{M}, w \models \varphi_1$ und $\mathfrak{M}, w \models \varphi_2$
$\mathfrak{M}, w \models \Box\varphi$ gdw. $\forall v \in W.wRv \Rightarrow \mathfrak{M}, w \models \varphi$

2.2.2 Modelle

$\mathfrak{M} \models \varphi \Leftrightarrow \forall w \in W.\mathfrak{M}, w \models \varphi$

2.3 Rahmen

$\mathfrak{F} \models \varphi \Leftrightarrow \forall V.(\mathfrak{F}, V) \models \varphi$

Sonderfall: Falls $\{v|wRv\} = \{\}$, gilt stets $\mathfrak{M}, w \models \Box\varphi$ sogar $\mathfrak{M}, w \models \bot$ *

Daraus foglt: $\mathfrak{M}, \mathfrak{w} \models \Box\bot \Rightarrow \{v|wRv\} = \{\}$!!!

$\mathfrak{M}, w \models \Diamond\varphi$ gdw. $\mathfrak{M}, w \models \neg\Box\neg\varphi$
$\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \not\models \Box\neg\varphi$
$\Leftrightarrow \neg(\forall v.wRv \Rightarrow \mathfrak{M}, w \models\neq \varphi$
$\Leftrightarrow \neg(\forall v.wRv \Rightarrow \mathfrak{M}, w \not\models \varphi$
$\Leftrightarrow \exists v.\neg(wRv \rightarrow \mathfrak{M}, v \not\models \varphi$
$\Leftrightarrow \exists v.wRv \wedge \mathfrak{M}, v \models \varphi$

I.A. gilt nicht $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ *

$\Diamond\top$ impliziert dass es Nachfolger gibt. !!!

3 Montag, 08.05.06

3.1 Erfülltheit in Rahmen

Satz: Die Formel K : $\Box p \rightarrow (\Box(p \rightarrow q) \rightarrow \Box q)$ ist in allen Rahmen erfüllt.
Beweis: Sei $\mathfrak{F} = (W, R)$ Rahmen und $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ ein Modell, $w \in W$
Zu zeigen: $\mathfrak{M}, w \models K$
Sei $\mathfrak{M}, w \models \Box p, \mathfrak{M}, w \models \Box(p \rightarrow q)$.
Zu Zeigen $w \models \Box q$

$$v \in W, wRv.zu\,Zeigen:\ v \models q$$
$$(n.V.)\, v \models p,\ v \models p \rightarrow q,\ also\, v \models q$$

Typisches Axiom: (4) $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$
Andere Schreibweise: $\Box p \rightarrow \Box\Box p$

$$\mathfrak{F} \models \Box\neg\neg\Box\neg p \to \neg\Box\neg p$$
$$\mathfrak{F} \models \neg\Box\Box\neg p \to \neg\Box\neg p$$
$$\mathfrak{F} \models \Box\neg p \to \Box\Box\neg p$$
$$\mathfrak{F} \models \Box q \to \Box\Box q$$

Satz: $\mathfrak{F} \models 4 \Leftrightarrow R\, transitiv$
Beweis:$\Leftarrow$
Sei R transitiv, $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ Modell $w \in W$.
Zu Zeigen: $\mathfrak{M}, w \models 4$
Sei also $w \models \Diamond\Diamond p$ Zu Zeigen $w \models \Diamond p$
Es existiert $v \in W$ mit $wRv, v \models \Diamond p$, also existiert $u \in W$ mit $vRu, u \models p$. Da R transitiv ist, gilt wRu.

Beweis:$\Rightarrow$
Sei $\mathfrak{F} \models 4$. Zu Zeigen: R transitiv, seien $w, v, u \in W$ mit wRv, vRu, zu Zeigen wRu.
Setze $V(p) = \{u\}$
(N.V.) gilt $(\mathfrak{F}, V), w \models 4$
Es gilt $w \models \Diamond\Diamond p$ da $wRv, v \models \Diamond p$, da $vRu, u \models p$. Mit $w \models 4$ folgt $w \models \Diamond p$
Also existiert s mit $wRs, s \models p \to s = u$, also wRu.

Formel	Dual	Eigenschaft	
K		-	s.o.
4:$\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$	$\Box p \to \Box\Box p$	transitiv	s.o.
T:$p \to \Diamond p$	$\Box p \to p$	reflexiv	Übung
B:$p \to \Box\Diamond p$	$\Diamond\Box p \to p$	symmetrie	Übung
D:$\Box p \to \Diamond p$	$\Box p \to \Diamond p$	linkstotal	$\forall w \exists v. wRv$
$\Diamond p \to \Box p$	$\Diamond p \to \Box p$	rechtseindeutig	$\forall w, v, u. wRv, wRu \Rightarrow v = u$
5:$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\Diamond\Box p \to \Box p$	euklidisch	$\forall w, v, u. wRv, wRu \Rightarrow vRu$
			R symm$\Rightarrow$(R transitiv $\Leftrightarrow$ R euklid.)

Satz: $\mathfrak{F} = (W, R) \models 5 \Leftrightarrow$ R euklid.
Beweis $\Leftarrow$ Sei $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ Modell, $w \in W, ZZ : \mathfrak{M}, w \models 5$. Sei also $w \models \Diamond p. ZZ : w \models \Box\Diamond p$

Sei also $v \in W$, $wRv, ZZ : v \models \Diamond p$.
NV exististiert u mit $wRu, u \models p$. Da R euklidisch vRu.

Beweis $\Rightarrow$: Sei $wRv, wRu, ZZ : vRu$.
Sei $V(p) = \{u\}$.
Es gilt $w \models \Diamond p$ (da $wRu, u \models p$) also mit (5) $w \models \Box\Diamond p$. Wegen wRv folgt $v \models \Diamond p$, also exisitert s mit $vRs, s \models p$, also $s = u$, also vRu.

4 Dienstag, 09.05.06

4.1 Logische Folgerung

Recall FOL: $\Phi \models \psi \Leftrightarrow (\forall \mathfrak{M}. \mathfrak{M} \models \Phi \Rightarrow \mathfrak{M} \models \psi)$

Hier: Drei Erfülltheitsbegriffe, daraus folgen drei Folgerungsbegriffe.
Notation: $\ldots \models \Phi, \Phi$ Menge von Formeln, heißt $\ldots \models \phi$ für alle $\phi \in \Phi$

4.1.1 Welten: (Lokale Konsequenz / Folgerung) $\models_l$

$\Phi \models_l \psi \Leftrightarrow \forall \mathfrak{M}, w. \mathfrak{M}, w \models \Phi \Rightarrow \mathfrak{M}, w \models \psi$

Bsp.: 1) $\{\Box p, \Box q\} \models_l \Box(p \wedge q)$
Denn: Sei $\mathfrak{M}, w \models \{\Box p, \Box q\}, ZZ : w \models \Box(p \wedge q)$
Sei also wRv, dann $v \models p, v \models q$, also $v \models (p \wedge q)$

2) $\{p\} \not\models_l \Box p$
Denn: $s_1 R s_2$ und $V(p) = \{s_1\}$

3) $\{p \to \Diamond p\} \not\models_l q \to \Diamond q$
Denn: $s_1 R s_2$ mit $V(p) = \{s_1, s_2\}, V(q) = \{s_1\}$

4.1.2 Modelle: (Globale Konsequenz / Folgerung) $\models_g$

$\Phi \models_g \psi \Leftrightarrow \forall \mathfrak{M}. \mathfrak{M} \models \Phi \Rightarrow \mathfrak{M} \models \psi$

Allgemein: $\Phi \models_l \psi \Rightarrow \Phi \models_g \psi$

Bsp.: 1) $\{\Box p, \Box q\} \models_g \Box(p \wedge q)$
Denn: Siehe Allgemein

2) $\{p\} \models_g \Box p$
Denn: Prämisse sagt: in allen Welten ist p wahr.
Demnach ist auch in allen nachfolgewelten Box p wahr:
Sei $\mathfrak{M} \models p, ZZ : \mathfrak{M} \models \Box p$.
Sei also $\mathfrak{M} = ((W, R), V), w \in W, ZZ : w \models \Box p$
Sei also $wRv, ZZ : v \models p$ da $\mathfrak{M} \models p$

3) $\{p \to \Diamond p\} \not\models_g q \to \Diamond q$
Denn: $s_1 R s_2, s_2 R s_1, V(p) = \{s_1, s_2\}, V(q) = \{s_1\}$

4.1.3 Rahmen: (Rahmen Konsequenz / Folgerung) $\models_r$

$\Phi \models_r \psi \Leftrightarrow \forall \mathfrak{F}. \mathfrak{F} \models \Phi \Rightarrow \mathfrak{F} \models \psi$

Allgemein: $\Phi \models_g \psi \Leftrightarrow \Phi \models_r \psi$

Bsp.: 1) $\{\Box p, \Box q\} \models_r \Box(p \wedge q)$
Denn: Siehe Allgemein

2) $\{p\} \models_r \Box p$
Denn: Siehe Allgemein

3) $\{p \to \Diamond p\} \models_g q \to \Diamond q$
Denn: Sei $\mathfrak{F} \models (p \to \Diamond p)$. Sei $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V), w$ eine Welt,
ZZ: $\mathfrak{M}, w \models q \to \Diamond q$.
Wähle Valuation V' mit $V'(p) = V(q)$. dann $(\mathfrak{F}, V'), w \models (p \to \Diamond p)$, also $(\mathfrak{F}, V), w \models (q \to \Diamond q)$

Hier: Folgerung $\models$ = lokale Folgerung $\models_l$

$\emptyset \models \varphi \Leftrightarrow: \models \varphi \Leftrightarrow: \varphi$ gültig! $\Leftrightarrow \forall \mathfrak{F}, V, w. (\mathfrak{F}, V), w \models \varphi$

Einschränkung der Modelle/Rahmen $\to$ mehr Folgerungen / Gültigkeiten.

z.B. Einschränkung auf transitive Rahmen: $\models_{trans.}$
Allgemein: F Klasse von Rahmen: $\Phi \models_F \psi \Leftrightarrow \forall \mathfrak{F} \in F. \forall V, w. (\mathfrak{F}, V), w \models \Phi \Rightarrow (\mathfrak{F}, V), w \models \psi$.

Bsp.: $\{\Diamond\Diamond p\} \models_{trans} \Diamond p$
$\{\Diamond\Diamond p\} \not\models \Diamond p$

4.2 Modales Schließen

Können wir logische Folgerungen durch einen syntaktischen Mechanismus einfangen?

Definition: Ein **k**-Beweis ist eine Liste von Formeln, von denen jede entweder ein Axiom, oder aus vorangehenden Formeln durch Anwendung einer Regel erhalten wird.

Axione: (τ) Alle aussagenlogischen Tautologien.

(K) $\Box p \to \Box(p \to q) \to \Box q$

(Dual) $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$

Regeln: Modus Ponens (mp) $\frac{\varphi \to \psi \;\; \varphi}{\psi}$

Substitution: $\frac{\varphi}{\psi}$ wenn ψ aus φ durch Substitution, d.h. ersetzen der prop Variable durch bel. Formel.

Generalisierung (nec): $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$

Jede in einem **k**-Beweis vorkommende Formel φ heißt **k**-beweisbar ($\vdash_{\mathbf{k}} \varphi$)
Schreibe $\Phi \vdash_{\mathbf{k}} \psi$ für $\exists \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Phi. \vdash_{\mathbf{k}} \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$

Satz: (Korrektheit) $\Phi \vdash_{\mathbf{k}} \psi \Rightarrow \Phi \models \psi$

Beweis: Es reicht $\vdash_{\mathbf{k}} \varphi \Rightarrow \models \varphi$
Zeige die Axiome sind gültig und die Regeln bewahren die Gültigkeit. (siehe Oben).

5 Montag, 15.05.06

5.1 Zu 1b)

$R' = \{(x, y) | \exists n \geq 0, x_0, \ldots, x_n.x_0 = x, x_n = y, \forall i = 0, \ldots, n-1.x_i R x_{i+1}\}$
ZZ: $R^* = R'$

$\subseteq$ Zeige R' trans, refl, $R \subset R'$
$\supseteq$ Zeige $xR'y \Rightarrow xR^*y$ mit R^* trans, refl.

5.2 Beispiele zu K-Beweisen

$(k') = \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \psi)$

$$
\begin{aligned}
&1)(TAUT)\,(B \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C)) \\
&(SUBST)\ B := \Box\varphi; A := \Box\psi; C := \Box(\varphi \wedge \psi) \\
&2) K \to K' \\
&3)(AXIOM) K \\
&4)(MP2, 3) K'
\end{aligned}
$$

$(\Box p \land \Box q) \to \Box(p \land q) = \Box p \to (\Box q \to \Box(p \land q))$

1) $p \to (q \to (p \land q)) \quad (TAUT)$

2)$\Box(p \to (q \to (p \land q))) \quad (GEN)$

3) K'

4)$K' subst \;\; p := p, q := (q \to (p \land q))$

$\Box(p \to (q \to (p \land q))) \to (\Box p \to \Box(q \to (p \land q)))$

5) $\Box p \to \Box(q \to (p \land q)) \qquad (MP\,4,2)$

6) $K'\, subst\; p := q, q := (p \land q)$

$\Box(q \to (p \land q)) \to (\Box q \to \Box(p \land q))$

7) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)\,)\; (TAUT)$

8) $7Subst\;\; A := \Box p, B := \Box(q \to (p \land q)), C := (\Box q \to \Box(p \land q))$

$(\Box p \to \Box(q \to (p \land q))) \to (\Box(q \to (p \land q))) \to (\Box q \to \Box(p \land q))) \to (\Box p \to (\Box q \to \Box(p \land q)))$

9) $(\Box(q \to (p \land q))) \to (\Box q \to \Box(p \land q))) \to (\Box p \to (\Box q \to \Box(p \land q))) \quad (MP\,5,8)$

10) $(\Box p \to (\Box q \to \Box(p \land q))) \quad (MP\,6,9)$

6 Dienstag, 16.05.06

6.1 Modelltheorie

Kripke Modell $\mathfrak{M} = ((W, R), V)$

Wann verhalten sich zwei Modelle (Welten, Zustände) gleich?

Konstruktion auf Modellen (Zusammenbauen von Modelen, Vereinfachen v. Modellen)

6.1.1 Äquivalenz

Def: (WELTEN:) Seine $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ Modelle, $w \in W, w' \in W'$ heißen äquivalent, wenn für jede modale Formel φ gilt:

$\mathfrak{M}, w \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{M}', w' \models \varphi$

(MODELLE:) $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ heißen äquivalent wenn für jede modale Formel φ gilt:

$\mathfrak{M} \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{M}' \models \varphi$

d.H. [Global Äquivalent] (für alle $w \in W.\mathfrak{M}, w \models \varphi$) gdw.(für alle $w' \in W'.\mathfrak{M}', w' \models \varphi$)

6.1.2 Disjunkte Vereinigungen

Formale Def.: Gegeben zwei Modelle $\mathfrak{M} = ((W, R), V); \mathfrak{M}' = ((W', R'), V')$ mit $W \cap$

$W' = \{\}$, dann heißt die Vereinigung $\mathfrak{M}\dot{\cup}\mathfrak{M}'$ gegeben durch $(W \cup W', R \cup R', \overline{V})$ mit $\overline{V}(p) = V(p) \cup V'(p)$

Satz Erfülltheit ist invariant unter disjunkter Vereinigung. D.h.
für $w \in W.\mathfrak{M}, w \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{M}\dot{\cup}\mathfrak{M}', w \models \varphi$
für $w' \in W'.\mathfrak{M}', w' \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{M}\dot{\cup}\mathfrak{M}', w \models \varphi$

D.h. eine Welt $w \in W$ ist zu $w \in W \cup W'$ äquivalent und analog für $w' \in W$

Indunktion über natürliche Zahlen

Natürlche Zahlen = kleinste Menge $\mathbb{N}$ mit

- $0 \in \mathbb{N}$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}$

Induktionsprinzip:

Sei P eine Eignschaft von nat. Zahl

Angenommen

1. $P(0)$

2. $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$

Dann haben wir $\forall x \in \mathbb{N}.P(x)$

Induktion über modallogischen Formeln

$\varphi ::= \bot|p|\varphi_1 \vee \varphi_2|\neg\varphi|\Box\varphi$

Induktionsprinzip:

Sei P eine Eigenschaft von Formeln.

Angenommen:

1. $P(\bot)$ [Induktionsanfang]
2. $P(p)$ für alle prop Var. p [Induktionsanfang]
3. $P(\varphi_1)$ und $P(\varphi_2) \Rightarrow P(\varphi_1 \vee \varphi_2)$
4. $P(\varphi) \Rightarrow P(\neg\varphi)$
5. $P(\varphi) \Rightarrow P(\Box\varphi)$

Je vor dem Pfeil: [Induktionsanfang]; Danach [Induktionsende]

Dann haben wir für alle Formeln $\varphi : P(\varphi)$

Beweis des Satzes

durch Induktion über Aufbau von φ

1. $\mathfrak{M}, w \models \bot$ gdw. $\mathfrak{M}\dot{\cup}\mathfrak{M}', w \models \bot$ OK.

2. $\mathfrak{M}, w \models p$ gdw. $w \in V(p)$ gdw.* $w \in V(p) \cup V'(p)$ gdw. $w \in \overline{V}(p)$ gdw. $\mathfrak{M}\dot{\cup}\mathfrak{M}', w \models p$
* da $V'(p) \in W'$ und $W \cap W' = \{\}$ und $w \in W$

3.$\mathfrak{M}, w \models \varphi_1 \vee \varphi_2$ gdw. $\mathfrak{M}, w \models \varphi_1$ oder $\mathfrak{M}, w \models \varphi_2$ gdw. (nach IV) $\mathfrak{M}\dot{\cup}\mathfrak{M}', w \models \varphi_1$ oder $\mathfrak{M}\dot{\cup}\mathfrak{M}', w \models \varphi_2$ gdw. (Def) $\mathfrak{M}\dot{\cup}\mathfrak{M}', w \models \varphi_1 \vee \varphi_2$

4. Analog zu 3.

5. $\Rightarrow$
Angenommen $\mathfrak{M}, w \models \Box\varphi$, d.h. nach Def: für alle $v \in W.wRv \Rightarrow \mathfrak{M}, v \models \varphi$.
Weil $R \subseteq W \cup W$, haben wir für alle $v \in W \cup W'.w(R)v \Rightarrow \mathfrak{M}, v \models \varphi$
also auch $v \in W \cup W'.w(R \cup R')v \Rightarrow \mathfrak{M}, v \models \varphi$
Nach IV:
für alle $v \in W \cup W'.w(R \cup R')v \Rightarrow \mathfrak{M}\dot{\cup}\mathfrak{M}', v \models \varphi.alsonachDef. : \mathfrak{M}\dot{\cup}\mathfrak{M}', w \models \Box\varphi$

$\Leftarrow$: Ann: $\mathfrak{M}\dot{\cup}\mathfrak{M}' \models \Box\varphi$, also für alle $v \in W \cup W', w(R \cup R')v \Rightarrow \mathfrak{M}\dot{\cup}\mathfrak{M}', v \models \varphi$
Also nach IV (Da $v \in W$)
für allw $v \in W \cup W', w(R \cup R')v \Rightarrow \mathfrak{M}, v \models \varphi$
also für alle $v \in W.wRV \Rightarrow \mathfrak{M}, v \models \varphi$
also (Def.) $\mathfrak{M}, w \models \Box\varphi$.

Anwendung: Die Globale Modalität E mit $\mathfrak{M}, w \models E\varphi$ gdw. es existiert $v \in W.\mathfrak{M}, v \models \varphi$ ist nicht der bisherigen Sprache definierbar.

7 Montag, 22.05.06

Satz: Modale Erfüllbarkeit von Formeln ist invariant unter disjunkter Vereinigung.

Sei A eine neue Primitive („globale Box“) definiert durch $\mathfrak{M}, w \models \mathrm{A}\varphi$ ged. für alle $v \in W.M, v \models \varphi$

Die Erfülltheit von $\mathrm{A}\varphi$ ist unabhängig von der aktuellen Welt, sondern eine globale Aussage über das Modell.

Frage: Können wir $\mathrm{A}\varphi$ in der bisherigen Sprache definieren?

Antwort: Nein, da

Annahme: Es gibt für jedes φ ein $\alpha(\varphi)$ mit $\mathfrak{M}, w \models \mathrm{A}\varphi \leftrightarrow \alpha(\varphi)$ und $\alpha(\varphi)$ ist definiert durch $\Box, \neg, \vee, \bot, p$

Nehme ein Modell $\mathfrak{M}$ in dem p überall gillt. Also auch $\mathfrak{M}, w \models \alpha(p)$ für alle w. Wähle ein solches w

Nehme ein Modell $\mathfrak{M}'$ in dem p nirgends gilt.

Nach dem Satz gilt $\mathfrak{M}\dot{\cup}\mathfrak{M}', w \models \alpha(p)$

Nach Definition von α gilt $\mathfrak{M}\dot{\cup}\mathfrak{M}' \models \alpha(p)$

Nach Definition von A gilt für alle $v \in W \cup W'.\mathfrak{M}\dot{\cup}\mathfrak{M}', v \models p$

Nach Satz: für alle $v \in W'.\mathfrak{M}', v \models p$. ↯

□

7.1 Erzeugte Untermodelle

$\mathfrak{M}'$ ist Untermodell von $\mathfrak{M}$.

Es gilt: $\mathfrak{M}' \not\models \Diamond\top, \mathfrak{M} \models \Diamond\top$

Also ist Erfüllbarkeit nicht invariant bezüglich Untermodellen.

Definition: $\mathfrak{M}' = ((W', R'), V')$ ist Untermodell von $\mathfrak{M} = ((W, R), V)$, falls:

- $W' \subseteq W$
- $R' = R \cap (W' \times W)$
- $V'(p) = V(p) \cap W'$

$\mathfrak{M}'$ ist erzeugtes Untermodell von $\mathfrak{M}$ falls zusätzlich $w \in W'$ und wRv impliziert $v \in W'$

Satz: Erzeugte Untermodelle sind invariant unter Erfülltheit.

Beweis: Durch Induktion über dem Formelaufbau: für $w \in W'.\mathfrak{M}, w \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{M}', w \models \varphi$

$\bot, \neg\varphi, \varphi_1 \vee \varphi_2, p$: Trivial (siehe Letzte Vorlesung)

$\Box\varphi$: $\mathfrak{M}, w \models \Box\varphi$ gdw. Nach Def.: für alle $v \in W$ mit wRv gilt $\mathfrak{M}, v \models \varphi$ gdw. (da $w \in W'$ und $\mathfrak{M}'$ erzeugt, ist jeded solche v auch $\in W'$)

Für alle $v \in W'$ mit $wRv.\mathfrak{M}, \models \varphi$ gdw. auch $v, w \in W', R' = R \cap (W' \times W)$

Für alle $v \in W$ mit $wR'v.\mathfrak{M}, v \models \varphi$ gdw. (IV)

Für alle $v \in W'$ mit $wR'v.\mathfrak{M}', v \models \varphi$ gdw.

$\mathfrak{M}', w \models \Box\varphi$

□

8 Dienstag, 23.05.06

Erzeugte Untermodelle

Gegeben ein Modell $\mathfrak{M} = ((W, R), V)$ und eine Menge $X \subseteq W$. Das von X erzeugte Untermodell von $\mathfrak{M}$ (Notation $< X >$) ist das kleinste erzeugte Untermodell $\mathfrak{M}' =$

$((W', R'), V')$ so dass $X \subseteq W'$. Es ist gegeben durch $W' = \bigcap\{W'' | ((W'', R''), V''$ erzeugtes Untermodell von $\mathfrak{M}, X \subseteq W''\}$ induzierte Untermodell.

Dieses Untermodell ist erzugt: Für $w \in W'$ und wRv; Zu zeigen: $v \in W'$

$w \in W' \Rightarrow w \in W''$ für alle erzeugten Untermodelle $((W'', R''), V'')$ mit $X \subseteq W''$

$\Rightarrow v \in W''$ für alle erzeugten Untermodelle $((W'', R''), V'')$ mit $X \subseteq W''$

$\Rightarrow v \in W'$.

$\square$

Für eine Welt $w \in W$ heißt $< \{w\} >$ das durch w „punkterzugte Untermodell“ oder auch „Untermodell mit Wurzel w.

Beipiel: auf genzen Zahlen. Das punkterzugte Untermodell mit $< \{0\} >$ ergibt die Natürlichen Zahlen.

8.1 Homomorphismen

Ein Homomorphismus $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ zwischen zwei Modellen $\mathfrak{M} = ((W, R), V)$ und $\mathfrak{M}' = ((W', R'), V')$ durch eine Abbildung $f : W \to W'$, so dass

- $w \in V(p) \Rightarrow f(w) \in V'(p)$
- $wRv \Rightarrow f(w)R'f(v)$

Homomorphismen sind <u>nicht</u> erfülltheits invariant.

Bei einem starken Homomorphismus gelten stattdessen:

- $w \in V(p) \Leftrightarrow f(w) \in V'(p)$
- $wRv \Leftrightarrow f(w)R'f(v)$

Sie sind dagegen erfüllbarkeits invariant.

Ein <u>beschränkter Homomorphismus</u>:

1. $w \in V(p) \Leftrightarrow f(w) \in V'(p)$
2. $wRv \Rightarrow f(w)R'f(v)$
3. $f(w)R'v' \Rightarrow \exists v$ mit $f(v) = v'$ und wRv

<u>Satz:</u> Sei $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ ein beschränkter Homomorphismus. Dann gilt für alle Formeln φ:

$\mathfrak{M}, w \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{M}', f(w) \models \varphi$

Beweis: Induktion über den Formelaufbeu

$\perp, \vee, \neg$: Trivial.

$p : \mathfrak{M}, w \models p \Leftrightarrow \mathfrak{M}, f(w) \models p$ ist genau Bedingung 1.

$\Box\varphi : \mathfrak{M}, w \models \Box\varphi$ gdw. (Def) für alle v mit $wRv.\mathfrak{M}, v \models \varphi$
gdw. (IV) für für alle v mit $wRv.\mathfrak{M}', f(v) \models \varphi$
gdw.(*) für alle v' mit $f(w)R'v'.\mathfrak{M}', v' \models \varphi$
gdw.(Def) $\mathfrak{M}', f(w) \models \Box\varphi$

(*) $\Rightarrow$:

Annahme: Für alle v mit $wRv.\mathfrak{M}', f(v) \models \varphi$ und $f(w)R'v'$. Zu zeigen: $\mathfrak{M}', v' \models \varphi$
Nach Bedingung 3 gibt es v mit $f(v) = v'$ und wRv.
Nach der Annahme $\mathfrak{M}', f(v = v') \models \varphi$

$\Box$

(*) $\Leftarrow$:

Annahme: für alle v' mit $f(w)R'v'.\mathfrak{M}', v' \models \varphi$ und wRv. Zu zeigen: $\mathfrak{M}', f(w) \models \varphi$
Nach Bedingung 2: $f(w)R'f(v)$. Setze $v' := f(v)$
Nach Annahme: $\mathfrak{M}', f(v) \models \varphi$.

$\Box$

Satz: Jede erfüllbare Formel φ ist in einem Baum-Modell erfüllbar.

Beweis: Sei $\mathfrak{M}$ und w so gewählt, dass $\mathfrak{M}, w \models \varphi$. Nach dem Satz über die erzeugten Untermodelle gilt: $< \{w\} >, w \models \varphi$.Betrachte alle Pfade, $wRw_1R \dots Rw_{n-1}Rw_n$ als Welten von $\mathfrak{M}'$.

$R' = \{(wRw_1R \dots Rw_n, wRw_1R \dots Rw_nRw_{n+1})\}$

$(wRw_1R \dots Rw_{n-1}Rw_n) \in V'(p)$ gdw. $w_n \in V(p)$

Definiere einen beschränkten Homomorphismus $f : \mathfrak{M}' = (W', R'), V') \rightarrow < \{w\} >$. Durch $f((wRw_1R \dots Rw_{n-1}Rw_n) = w_n$

Nach dem Satz über beschränkte Homomorphismen gilt $\mathfrak{M}', w \models \varphi$. $\mathfrak{M}'$ ist Baum-Modell.

$\Box$

8.2 Bisimulationen

Definition Gegeben zwei Modelle $\mathfrak{M} = ((W, R), V), \mathfrak{M}' = ((W', R')V')$. Eine Bisimulation ist eine nicht leere Relation Z $\subseteq W \times W'$, so dass für alle w, w', v mit $w\mathrm{Z}w'$ und wRv existiert ein v' mit $v\mathrm{Z}v'$ und $w'R'v'$.

Umgekehrt: Für alle w, w', v' mit wZw' und $w'R'v'$ existiert v mit wRv und vZv'

9 Montag, 29.05.06

Korrektur zum Begriff Bisimulation
Bisimulation Z zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$: $Z \subseteq W \times W'$

1. $wZw' \Rightarrow (w \in V(p)$ gdw. $w' \in V'(p))$
2. $wZw', wRv \Rightarrow \exists v'.vZv'$ und $w'R'v'$
3. $wZw', w'R'v' \Rightarrow \exists v.vZv'$ und wRv

Lemma Wenn $Z : \mathfrak{M} \rightleftarrows \mathfrak{M}'$ dann $Z^{-1} : \mathfrak{M}' \rightleftarrows \mathfrak{M}$ mit $Z^{-1} = \{w', w | (w, w') \in Z\}$

9.1 Multimodale Logik

Gegeben sein eine Menge τ von Labels. Die multimodale Sprache über τ ist:

$\varphi := p|\bot|\neg\varphi|\varphi_1 \vee \varphi_2|[a]\varphi \;\; a \in \tau$

$< a > \varphi := \neg[a]\neg\varphi$

Modelle $\mathfrak{M} = ((W, R_a), V) \;\; a \in \tau$

Erfülltheit: $\mathfrak{M}, w \models [a]\varphi$ gdw für alle v mit $wR_av.\mathfrak{M}, v \models \varphi$.

Modelle sind also gelabelte Transitionssysteme. (Verschiedene Übergänge, an den „Kanten“ stehen die Labels)

Bisimulation bei multimodalen Logiken (über τ - Modellen)
Bisimulation über alle R_a

1. $wZw' \Rightarrow (w \in V(p)$ gdw. $w' \in V'(p))$
2. $wZw', wR_av \Rightarrow \exists v'.vZv'$ und $w'R'_av'$ für alle $a \in \tau$
3. $wZw', w'R'_av' \Rightarrow \exists v.vZv'$ und wR_av für alle $a \in \tau$

Satz Sei $Z : \mathfrak{M} \rightleftarrows \mathfrak{M}'$ mit wZw' (Schreibweise: $Z : \mathfrak{M}, w \rightleftarrows \mathfrak{M}', w'$. Dann gilt $\mathfrak{M}, w \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{M}', w' \models \varphi$.

Beweis: Per Indultion über die Formel φ
$\bot, \neg\varphi, \varphi_1 \vee \varphi_2$: Klar
p: Nach Bedingung 1 der Bisimulationsbedingungen.
$\Box\varphi : \mathfrak{M}, w \models \Box\varphi \Rightarrow$ für alle v mit $wRv.\mathfrak{M}, v \models \varphi$

$\Rightarrow$ (Bed.2) für alle v mit wRv existiert ein v' mit $vZv', w'R'v', \mathfrak{M}, v \models \varphi$
$\Rightarrow$ (IV) für alle v mit wRv existiert v' mit $vZv', w'R'v', \mathfrak{M}', v' \models \varphi \Rightarrow$ (Bed.3) für alle v' mit $w'R'v'.\mathfrak{M}', v' \models \varphi$
$\Rightarrow \mathfrak{M}', w' \models \Box\varphi$

Andere Richtung: Analog!

$\Box$

10 Dienstag, 30.05.06

Satz:

1. $\mathfrak{M} \rightleftarrows \mathfrak{M}\dot{\cup}\mathfrak{M}'$
2. Wenn $\mathfrak{M}'$ ein erzugtes Untermodell von $\mathfrak{M}$ ist, dann $\mathfrak{M} \rightleftarrows \mathfrak{M}'$
3. Wenn $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ ein surjektiver beschränkter Homomorphismus ist, dann $\mathfrak{M} \rightleftarrows \mathfrak{M}'(\mathfrak{M}, w \rightleftarrows \mathfrak{M}, f(w))$

Beweis:

1. $id_{\mathfrak{M}} = \{(w, w)|w \in W\} : \mathfrak{M} \rightleftarrows \mathfrak{M}\dot{\cup}\mathfrak{M}'$
2. $id_{\mathfrak{M}'} = \{(w', w')|w' \in W'\} : \mathfrak{M}' \to \mathfrak{M}$
3. Übung!

Beispiel:

(Von w aus Stränge der Länge n (alle endlich lang)!)

$\mathfrak{M}$

$W = \{w\} \cup \{(n, k)|n \geq 1, 1 \geq k \geq n\}$

$R = \{(n, k), (n, k + 1)|n \geq 1, 1 \geq k \geq n - 1\} \cup \{(w, (n, 1))\}$

Wie w nur mit einer unendlichen Kette.

$\mathfrak{M}'$

$W' = W \setminus \{w\} \cup \{w'\} \cup \{(*, k)|k \geq 1\}$

$R' = R \setminus \{(w, (w, 1))|n \geq 1\} \cup \{(w', (w', 1))|n \geq 1\} \cup \{(w', (*, 1))|\} \cup \{(*, k), (*, k+1)|k \geq 1\}$

1. $\mathfrak{M}, w$ und $\mathfrak{M}', w'$ sind äquivalent (in Zeichen $\mathfrak{M} \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}'$), d.h. für alle Formeln $\varphi . \mathfrak{M}, w \models \varphi$ gdw $\mathfrak{M}', w' \models \varphi$

   Beweis: Sei φ eine Formel mit n Boxen. Schneide die unendliche Kette in $\mathfrak{M}'$ an der Stelle $n+1$ ab. Dies führt zu $\mathfrak{M}''$. Dann ist $\mathfrak{M}', w' \models \varphi$ gdw $\mathfrak{M}'', w' \models \varphi$. Offenbar ist $\mathfrak{M}, w \rightleftarrows \mathfrak{M}'', w'$. Setze $(*, k)$ in Relation zu $(n+1, k)$, d.h. Z $= id_{\mathfrak{M}} \setminus \{(w, w)\} \cup \{(w, w')\} \cup \{((n+1, k), (*, k)) | 1 \geq k \geq n+1\}$

   Nach dem Äquivalenzsatz ist $\mathfrak{M}, w \models \varphi$ gdw $\mathfrak{M}'', w \models \varphi$ Also $\mathfrak{M}, w \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{M}', w' \models \varphi$

   $\square$

2. $\mathfrak{M}, w$ und $\mathfrak{M}', w'$ sind nicht bisumlar.

   (Dies ergibt sich daraus, dass Bisimularität fordert, dass es für jeden Schritt in einem Modell einen Schritt in einem anderen Modell gibt. Folgt man dem unendlichen Pfad, kann kein anderer Pfad „mithalten")

Definition: Ein Modell $\mathfrak{M} = ((W, R), V)$ heißt endlich verzweigend, wenn für alle Welten $w \in W$ die Menge der Nachfolger $\{v | wRv\}$ endlich ist.

Satz: Hennessy-Milner Gegeben zwei Modelle $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ die endlich verzweigend sind, und zwei Welten $w \in W, w' \in W'$. Dann sind äquivalent:

1. $w \leftrightsquigarrow w'$(d.h. für alle $\varphi . \mathfrak{M}, w \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{M}', w' \models \varphi$)
2. $\mathfrak{M}, w \rightleftarrows \mathfrak{M}', w'$

Beweis:

(2)$\Rightarrow$(1): Schon bewiesen (Gestern)

(1)$\Rightarrow$(2): Die Relation $\leftrightsquigarrow$ ist eine Bisimulation $\leftrightsquigarrow$: $\mathfrak{M}, w \rightleftarrows \mathfrak{M}', w'$

1. $w \leftrightsquigarrow w' \Rightarrow \mathfrak{M}, w \models p$ gdw. $\mathfrak{M}', w' \models p$. Klar
2. Annhame: $w \leftrightsquigarrow w'$ und wRv. Zu zeigen: Es gibt v'

   a) $w'R'v'$

   b) $v \leftrightsquigarrow v'$

   Sei $S' = \{u' | w'R'u'\}$. S' ist nicht leer, weil sonst w' keinen Nachfolger hätte, also $\mathfrak{M}', w' \models \Box\bot$. Im Gegensatz zu $\mathfrak{M}, w \not\models \Box\bot$ und $w \leftrightsquigarrow w'$.

   S' endlich, da $\mathfrak{M}'$ endlich verzweigend.

   Sei also $S' = \{w'_1, \ldots, w'_n\}$

Angenommen: Es gibt kein $v' \in S'$ mit $v \leftrightsquigarrow v'$. Dann gibt es für jedes $i = 1, \ldots, n$ eine Formel ψ_i mit $\mathfrak{M}, v \models \psi_i$ und $\mathfrak{M}', w' \not\models \psi_i$

Dann ist $\mathfrak{M}, w \models \Diamond(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$ und $\mathfrak{M}', w' \not\models \Diamond(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$

Wiederspruch zu $w \leftrightsquigarrow w'$

Also muss es $v' \in S'$ mit $v \leftrightsquigarrow v'$ geben.

3. Analog zu 2.

$\square$

11 Montag, 12.06.06

11.1 Endliche Modelleigenschaft

Defintion: Für eine Signatur τ und eine Klasse M von $\tau - Modellen$ hat M die endliche Modelleigenschaft, wenn für jedes $\mathfrak{M} \in M$ und $\mathfrak{M} \models \varphi$ für eine Formel φ ein endliches Modell $\mathfrak{M}' \in M$ mit $\mathfrak{M}' \models \varphi$ existiert.

(Alter Satz: Jede erfüllbare Formel ist durch ein baumartiges Modell erfüllbar.)

Im folgenden untersuchen wir $M =$ alle Modelle.

11.1.1 Grad und Länge

Definition: Der Grad $deg(\varphi)$ einer Formel wird induktiv definiert durch:

- $deg(\perp) = 0$
- $deg(p) = 0$
- $deg(\neg\varphi) = deg(\varphi)$
- $deg(\varphi \vee \psi) = max(deg(\varphi), deg(\psi))$
- $deg(\Box\varphi) = deg(\varphi) + 1$

Satz 2.29: Sei die Menge der propositionalen Variablen endlich.

Satz 2.29(i):Für τ endlich gibt es nur endlich viele nicht-äquivalente Formeln mit Grad $\leq$ n

Satz 2.29(ii): Für alle τ endlich, $n \in \mathbb{N}$ und w Welt in $\mathfrak{M}$ ist die Menge der in $\mathfrak{M}, w$ geltenden Formeln äquivalent zu einer einzigen Formel.

Beweis:

(i): Beweis per Induktion über n

$n = 0$: Es gibt bis auf Äquivalenz endlich viele verschiedene aussagenlogische Formeln. (Genauer 2^{2^P} viele, wenn P die Anzahl der aussagnlogischen Variablen ist.)

$n \to n + 1$:

Jede Formel vom Grad $\leq n + 1$ ist eine boolsche Kombination von Formeln $\Box\varphi$ mit $deg(\varphi) \leq n$. Nach (IV) geibt es bis auf Äquivalenz nur endlich viele solche φ also gibt es (bis auf logische Äquivalenz) auch nur endlich viele boolsche Kombinationen davon.

(ii) folgt direkt aus (i)

$\Box$

11.1.2 n-Bisimularität

Definition: Sei w Welt im $\mathfrak{M}$ und w' Welt in $\mathfrak{M}'$. w und w' heißen n-bisimular $w \rightleftarrows_n w'$falls es eine Folge von Relation $\mathrm{Z}_n \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{Z}_0$ gibt mit

(i) $w\mathrm{Z}_n w'$
(ii) für $w\mathrm{Z}_0 w'$ gilt $w \in V(p)$ gdw. $w' \in V'(p)$
(iii) $v\mathrm{Z}_{i+1}v'$ und $vRu \Rightarrow \exists u'$ mit $v'R'u'$ und $u\mathrm{Z}_i u'$
(iv) $v\mathrm{Z}_{i+1}v'$ und $v'R'u' \Rightarrow \exists u$ mit vRu und $u\mathrm{Z}_i u'$

Satz : Sei τ endlich und die Menge der propositionalen Variablen endlich, $n \in \mathbb{N}$. Äquivalent sind:

(i) $w \rightleftarrows_n w'$ (ii) w und w' verhalten sich gleich, für modale Formeln vom Grad $\leq n$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) per Induktion über n

$n = 0 : w \rightleftarrows_0 w'$ gilt $\mathfrak{M}, w \models p$ gdw. $\mathfrak{M}', w' \models p$
und damit gilt es auch für φ vom Grad 0.

$n \to n + 1$: Sei also $w \rightleftarrows_{n+1} w'$ und $\mathfrak{M}, w \models \Box\varphi$ für $deg(\varphi) \leq n$.
Zu zeigen: $\mathfrak{M}', w' \models \Box\varphi$.
Sei also $w'R'v'$. Zu zeigen: $\mathfrak{M}, v' \models \varphi$.
Nach Bedingung (iv) bekommen wir ein v mit wRv und $v \rightleftarrows_n v'$.
Nach (IV) gilt also $\mathfrak{M}, v \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{M}', v' \models \varphi$.
Da aber $\mathfrak{M}, w \models \Box\varphi$, damit also $\mathfrak{M}, v \models \varphi$ gilt also $\mathfrak{M}', v' \models \varphi$.

Damit haben wir gezeigt:

$\mathfrak{M}, w \models \Box\varphi \Rightarrow \mathfrak{M}', w' \models \Box\varphi$

Für die Rückrichtung: Analog.

Erweiterung auf boolsche Kombinationen ist einfach.

Beweis(ii) $\Rightarrow$ (i)

Genau so wie der Satz von Hennessy-Milner.

□

12 Dienstag, 13.06.06

Prop 2.15 Jede Formel φ die erfüllbar ist, ist auch in einem baumartigen Modell erfüllbar.
Prop 2.29 Sei τ eine endliche Signatur und sein die Menge der prop. Variablen endlich. Dann gibt es bis auf Äquivalenz nur endlich viele verschiedene Formeln vom Grad $\leq n$
Prop 2.31 Seien τ und Menge der prop Var endlich. Äquivalent sind

- $w \rightleftarrows_n w'$
- w und w' erfüllen die gleichen Modalformeln vom Grad $\leq n$

Definition: Sei $\mathfrak{M}$ ein von einer Wurzel w erzeugtes Modell (Jede Welt ist von w aus erreichbar). Die Höhe einer Welt ist definiert als

- $height(w) = 0$
- $height(v) = n + 1$, falls uRv mit $height(u) = n$ und n minimal.

Die Höhe eines Modelles ist definiert als

$$height(\mathfrak{M}) = \begin{cases} n, \; falls\, n = max.\, Hoehe\, einer\, Welt\, in\, \mathfrak{M}\, existiert \\ \infty, \; sonst \end{cases}$$

Definition:Für ein Modell $\mathfrak{M}$ und $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathfrak{M} \restriction k$ das Untermodell aller Welten mit Höhe $\leq k$.

(Erfüllbarkeit für $\mathfrak{M} \restriction k, v \models \varphi$ bleibt erhalten wenn $k \geq deg(\varphi) + height(v)$)

Lemma 2.33
Sei $\mathfrak{M}$ ein wurzelerzeugtes Modell und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist für jede Welt w in $\mathfrak{M}$
$\mathfrak{M} \restriction k, w \rightleftarrows_l \mathfrak{M}, w$ für $l = k - height(w)$

Beweis: Versuch per Induktion über l

$l = 0$: $\mathrm{Z}_0 = \{(w, w)\}$

$l \to l + 1$: $\mathrm{Z}_0 = \ldots = \mathrm{Z}_{l+1} = \{(w, w) | w \in \mathfrak{M} \restriction k\}$

Bedingung (i) und (ii) der $l + 1$-Bisimulation sind klar.

Für $0 \leq i \leq l$

(iii) $v\mathrm{Z}_{i+1}v, vRu$(links) dann existiert vRu mit $v\mathrm{Z}_i u$(rechts)

(iv) $v\mathrm{Z}_{i+1}v, vRu$(rechts). Frage ist: ist u in $\mathfrak{M} \upharpoonright k$?

Neuer Beweis: $\mathrm{Z}_i = \{(v,v) | height(v) \leq k - i\}$

Bedingungen der n-Bisimulation:

(i) $w\mathrm{Z}_l w$
$\Leftrightarrow height(w) \leq k - l$
$\Leftrightarrow height(w) \leq k - (k - height(w))$
$\Leftrightarrow height(w) \leq height(w)$

(ii) Klar, da $\mathfrak{M} \upharpoonright k$ Untermodell von $\mathfrak{M}$

(iii)$v\mathrm{Z}_{i+1}v$, (links)vRu ist auch vRu (Rechts) und $u\mathrm{Z}_i u$. Da $height(v) \leq k - (i+1)$ und $height(u) =\leq k - i$

(iv) Wie 3. nur Seitenvertauscht und da $height(v) =\leq k - (i+1)$ und $height(u) =\leq k - i \Rightarrow u \in \mathfrak{M} \upharpoonright k$

□

Theorem 2.34: Sei τ endliche Signatur und Menge der prop. Var endlich. Wenn φ in einem Modell erfüllbar ist, ist es auch in einem endlichen Modell erfüllbar.

Beweis: Sei also $\mathfrak{M}, w \models \varphi$.
Nach Prop.2.15 gibt es ein baumartiges $\mathfrak{M}_2, w_2 \models \varphi$, mit w_2 als Wurzel
Sei $k = deg(\varphi)$ und $\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}_2 \upharpoonright k$.
Nach Lemma 2.33 ist $\mathfrak{M}_3, w_2 \rightleftarrows_k \mathfrak{M}_2, w_2$.
Nach Prop.2.31 ist $\mathfrak{M}_3, w_2 \models \varphi$

Definiere Mengen von Welten $S_0, \ldots, S_k$ durch Induktion über $n \leq k$.
$S_0 := \{w_2\}$
S_{n+1} : Sei $v \in S_n$. Nach Proposition 2.29 gibt es bis auf Äquivalenz nur endlich viele verschiedene Formeln vom Grad $\leq k$. Für jede solche Formel der Form $\Diamond\varphi$ mit $\mathfrak{M}_3, v \models \Diamond\varphi$ wähle eine Welt u mit $\mathfrak{M}_3, u \models \varphi$. Füge u zu S_{n+1} hinzu. Insgesammt ist S_{n+1} endlich.

$\mathfrak{M}_4$ sei das Untermodell von M_3 mit der Weltenmenge $S_0 \cup \ldots \cup S_k$.

Man kann zeigen $\mathfrak{M}_4, w_2 \rightleftarrows_k \mathfrak{M}_3, w_2$
Nach Prop.2.31 ist dann $\mathfrak{M}_4, w_2 \models \varphi$ und $\mathfrak{M}_4$ ist endlich. □

13 Montag, 26.06.06

13.1 Folgerund / Konsequenz

$\Phi \models \psi$: Wenn $SMILEY \models \Phi \Rightarrow SMILEY \models \psi$

Lokale Konsequenz:

$\Phi \models \psi \Leftrightarrow (\forall ((W, R), V), w \in W.((W, R), V), w \models \Phi \Rightarrow w \models \psi)$

13.2 Ableitbarkeit

$\Phi \vdash \psi$

~~„Es existiert ein Beweis von~~ $\cancel{\psi}$ ~~aus Annahmen~~ $\cancel{\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Phi}$~~"~~

Hier: $\Phi \vdash \psi \Leftrightarrow \exists \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Phi. \vdash_{\mathbf{K}} \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$

Wenn $\Phi \models_F \psi$ Dann ist die Menge aller Rahmen für die die Konsquenz gilt auf die Klasse F der Rahmen beschränkt.

Variante: $\Phi \vdash_\Lambda \psi$ Lambda steht für eine Menge von Axiomen, die in diesem Fall gelten.

Es gilt:
Satz (Korrektheit von **K**): $\Phi \vdash \psi \Rightarrow \Phi \models \psi$

Beweis: Sei $\Phi \vdash \psi$, d.h. es existieren $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Phi$ mit $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$

Zu zeigen: $\Phi \models \psi$. Sei also w Welt mit $w \models \Phi$.

Zu zeigen: $w \models \psi$

Nach Satz oben $\models \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$ (*)

Wegen $w \models \Phi$ gilt $w \models \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$,

genauer $w \models \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$, gemäß (*)

also $w \models \psi$

$\square$

14 Dienstag, 27.06.06

14.1 Vollständigkeit

Satz A: $\Phi \models \psi \Rightarrow \Phi \vdash \psi$

Definition: Φ Menge von Formeln.
Φ erfüllbar $\Leftrightarrow \exists \mathfrak{F}, V, w \models \Phi$

Φ konsistent $\Leftrightarrow \neg(\Phi \vdash \bot)$
$\Leftrightarrow \forall n, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Phi. \nvdash \neg(\varphi_1 \wedge, \ldots, \wedge \varphi_n)$

Satz B: Φ konsistent $\Rightarrow \Phi$ erfüllbar.

Beweis von Satz A aus Satz B

Sei $\Phi \models \psi \Rightarrow \Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar!
Nach Satz B gilt $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ inkonsistent.
$\Rightarrow$ es existieren $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Phi \cup \{\neg\psi\}$ mit $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$

Fall 1:$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Phi$: Dann $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$ (Prämisse Falsch, alles herleitbar)

Fall 2: o.E. $\varphi_n \equiv \neg\psi$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} \in \Phi$
Dann $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1} \wedge \neg\psi)$, also
$\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1} \to \psi$, also $\Phi \vdash \psi$

$\square$

Recall: $(X, \leq)$ partiell geordnete Menge. $x \in X$ Maximal $\Leftrightarrow \forall y \in X. x \leq y \Rightarrow x = y$

DefinitionEine maximal konsistente Menge (MCS) ist ein maximales Element Γ in der Menge der kosistenten Formelmengen, geordnet durch $\subseteq$
Explizit:

1. Γ konsistent
2. $\Gamma \subseteq \Gamma', \Gamma' kons. \Rightarrow \Gamma = \Gamma'$

Lemma (Hintikka) Sei Γ MCS

1. $\bot \notin \Gamma$
2. $\top \in \Gamma$
3. $\neg\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow \varphi \notin \Gamma$
4. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma \Leftrightarrow \varphi, \psi \in \Gamma$
5. $\varphi \vee \psi \in \Gamma \Leftrightarrow \varphi \in \Gamma \vee \psi \in \Gamma$
6. $\varphi, \varphi \to \psi \in \Gamma \Rightarrow \psi \in \Gamma$

Beweis:

1. Sonst würde sich Falsum herleiten lassen
2. Gilt, da 3. gilt und Falsum nicht drinnen ist.

3. Es gilt nicht $\varphi, \neg\varphi \in \Gamma$, da Γ konsistent ist. Noch zu Zeigen: $\varphi \in \Gamma \vee \neg\varphi \in \Gamma$.
   (*) Dazu genügt: $\Gamma \cup \{\varphi\}$ konsistent $\vee \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ konsistent.
   Annahme $\Gamma \cup \{\varphi\}, \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ sind inkonsistent.
   d.h. $\vdash \neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n), \psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma \cup \{\varphi\}$
   $\vdash \neg(\chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_k), \chi_1, \ldots, \chi_k \in \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$
   Da Γ konsistent, o.E. $\psi_n \equiv \varphi, \chi_k \equiv \neg\varphi$
   Dann $\vdash \varphi \rightarrow \neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_{n-1})$
   $\vdash \neg\varphi \rightarrow \neg(\chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_{n-1})$
   $\vdash \neg(\psi_1, \wedge \ldots \wedge \psi_{n-1}) \vee \neg(\chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_{n-1}))$
   $\vdash \neg(\psi_1, \wedge \ldots \wedge \psi_{n-1} \wedge \chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_{n-1})$
   Daraus folgt Γ inkonsistent. (Wiederspruch

   Aus (*) folgt nun wegen $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}, \Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$
   $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} \vee \Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\neq \varphi\}$, also
   $\psi \in \Gamma \vee \neg\psi \in \Gamma$

   $\square$

4. Intutiv klar.
5. Analog 3.
6. Nach 5. und 3.

Lemma (Erweiterungslemma): Wenn Φ konsistent und φ Formel, gilt $\Phi \cup \{\varphi\}$ konsistent $\vee \Phi \cup \{\neg\varphi\}$ konsistent. (Beweis analog zu oben)

Beispiel: $\mathfrak{M}$ Modell und $w \in W$. $Th(w) = \{\varphi | w \models \varphi\}$ (Theorie von w) ist MCS.

Lemma (Lindenbaum): Φ konsistent $\Rightarrow \exists \Gamma MCS. \Phi \subseteq \Gamma$

Beweis: Sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine vollständige Liste aller Formeln. Definierte $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch:

$$\Phi_0 = \Phi,\ \Phi_{n+1} = \begin{cases} \Phi_n \cup \{\varphi\}\ , & falls\, kons. \\ \Phi_n \cup \{\neg\varphi\}\ , & sonst \end{cases}$$

Dann ist per Induktion über n und Erweiterungslemma Φ_n konsistent für alle n. Setze $\Gamma \bigcup \{\Phi_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Γ ist konsistent: Annahme: $\vdash \neg(\psi_1 \wedge \ldots \psi_k), \psi_1, \ldots \psi_k \in \Gamma$
Dann existiert ein n mit $\psi_1, \ldots, \psi_k \in \Phi_n$ WIEDERSPRUCH

Γ ist maximal: Nach Konstruktion gilt für alle $\varphi . \varphi \in \Gamma \vee \neg\varphi \in \Gamma$

15 Montag, 03.07.06

Lemma (Nachtrag zum Explizit machen): Γ MCS $\Leftrightarrow$

- Γ konsistent
- $\forall\varphi.\varphi \in \Gamma \vee \neg\varphi \in \Gamma$

15.1 Konstruktion

- W = Menge aller MCS
- $\Gamma R \Delta :\Leftrightarrow (\forall\varphi.\varphi \in \Delta \Rightarrow \Diamond\varphi \in \Gamma)$
- $V(p) :\Leftrightarrow \{\Gamma | p \in \Gamma\}$

Wahrheitslemma: $((W, R), V), \Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Gamma$
Beweis: per Induktion über φ
Wähle:

- $\mathfrak{F} = (W, R)$
- $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$

1. $\varphi \equiv p$: Dann $\mathfrak{M}, \Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma \in V(p) \Leftrightarrow p \in \Gamma$
2. $\varphi \equiv \neg\psi$: Dann $\mathfrak{M}, \Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M}, \Gamma \not\models \psi \Leftrightarrow (IV)\psi \notin \Gamma \Leftrightarrow (Lemma)\neg\psi \in \Gamma$
3. $\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$: (IV: Behauptung gilt für φ_1, φ_2) $\mathfrak{M}, \Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, \Gamma \models \varphi_1$ und $\mathfrak{M}, \Gamma \models \varphi_2) \Leftrightarrow (\varphi_1 \in \Gamma$ und $\varphi_2 \in \Gamma) \Leftrightarrow (sieheOben)\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Gamma$
4. $\varphi \equiv \Box\psi$: (IV: Behauptung gilt für ψ) $\mathfrak{M}, \Gamma \not\models \Box\psi \Leftrightarrow$ (Es ex. Δ mit $\Gamma R \Delta$ und $\mathfrak{M}, \Delta \not\models \psi) \Leftrightarrow (IV)\psi \notin \Delta \Leftrightarrow \neg\psi \in \Delta$
   $*_1, *_2$
   $\Leftrightarrow \neg\Box\psi \in \Gamma \Leftrightarrow \Box\psi \notin \Gamma$

   $*_1$: Da $\Gamma R \Delta$, folgt aus $\neg\psi \in \Delta$, $\Diamond\neg\psi \in \Gamma$. Aber $\vdash_{\mathbf{K}} \Diamond\neg\psi \leftrightarrow \neg\Box\psi$. Also $\neg\Box\psi \in \Gamma$ (sonst $\Box\psi \in \Gamma, \Gamma$ inkonsistet).

   $*_2$: Braucht:

   Existenzlemma: Γ MCS, $\Diamond\varphi \in \Gamma \Rightarrow$ MCS $\Delta.\Gamma R \Delta$ und $\varphi \in \Delta$

   Damit: $\neg\Box\psi \in \Gamma \Rightarrow (\Gamma MCS)\Diamond\neg\psi \in \Gamma \Rightarrow (Ex.Lemma)\exists\Delta.\Gamma R\Delta, \neg\psi \in \Gamma$

Lemma: $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi, \Gamma K - MCS \Rightarrow \varphi \in \Gamma$

Beweis des Existenzlemmas: Setze $\Delta_0 = \{\varphi\} \cup \{\psi | \Box\psi \in \Gamma\}$
Behauptung: Δ_0 konsistent.
Annahme: $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Delta_0, \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$
Fall 1: $\Box\psi_1, \ldots, \Box\psi_n \in \Gamma \Rightarrow (\Gamma MCS)\Box(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \in \Gamma \Rightarrow \Box\bot \in \Gamma \Rightarrow (\Box p \wedge \Diamond q \Rightarrow$

$\Diamond(p \wedge q)\Diamond\bot \in \Gamma$
Wiederspruch!
Fall 2: $\psi_n \equiv \varphi$, also $\vdash \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_{n-1} \to \neg\varphi$
$\Rightarrow (k) \vdash_{\mathbf{K}} \Box\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\varphi_n \to \neg\varphi$
$\Rightarrow \Box\neg\varphi \in \Gamma$ WIEDERSPRUCH, da $\Diamond\varphi \in \Gamma$ $\Box$

Aus Behauptung und Lindenbaumlemma erhalten wir MCS Δ mit $\Delta_0 \subset \Delta$.

Dann gilt $\varphi \in \Delta_0 \subset \Delta$. Noch zu zeigen: $\Gamma R \Delta$.
Sei also $\psi \in \Delta$. Zu zeigen: $\Diamond\psi \in \Gamma$
Annahme: $\Diamond\psi \notin \Gamma \Rightarrow \neg\Diamond\psi \in \Gamma \Rightarrow (\Gamma MCS)\Box\neg\psi \in \Gamma \Rightarrow \neg\psi \in \Delta_0 \subset \Delta$
Wiedersruch, da $\psi \in \Delta$ und Δ konsistent.

Damit
Beweis Satz B: Nach Lindenbaum Lemmma existiert ein $MCS\Gamma$ mit $\Phi \subseteq \Gamma$. Nach Wahrheitslemma gilt $\mathfrak{M}, \Gamma \models \Phi$

$\Box$

Anmerkung: $((W_{\mathbf{K}}, R_{\mathbf{K}}), V_{\mathbf{K}})$ Kannonisches Modell (Auch mit anderen Buchstaben wenn andere Logiken gemeint sind. Hier für K)

15.2 Vollständigkeit von T

Für durch Zusatzaxiome wie T bestimmte LogikenΛ: gleiher Vollständigkeitsbeweis, aber mit Λ-Konsistenz. Insbesondere: $W_\Lambda =$ Menge der max. Λ-konsistentenn Mengen ($\Lambda - MCS$).

Zu zeigen: $(W_\Lambda, R_\Lambda) \models \Lambda$

Beispiel:

- T ($\Box\varphi \to \varphi$) ist vollständig für die Klasse der reflexiven Rahmen.

  Beweis: Zu zeigen: $(W_T, R_T) \models T$
  Sei also Γ ein T-MCS, zu zeigen $\Gamma R_T \Gamma$
  Sei also $\varphi \in \Gamma$. Zu zeigen $\Diamond\varphi \in \Gamma$
  das folgt sofort aus $\vdash_T \varphi \to \Diamond\varphi$

  $\Box$

- (4): $\Box p \to \Box\Box\varphi$ ist vollst. für transitive Rahmen

  Beweis $(W_4, R_4) \models (4)$ (oder: ist transitiv)
  Seien also $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ $4 - MCS$ mit $\Gamma_1 R \Gamma_2$ und $Gamma_2 R \Gamma_3$ Zu zeigen: $\Gamma_1 R \Gamma_3$
  Sei $\varphi \in \Gamma_3$, zu zeigen: $\Diamond\varphi \in \Gamma_1$
  Nach Voraussetzung: $\Diamond\varphi \in \Gamma_2$, also $\Diamond\Diamond\varphi \in \Gamma_1$.

Dann gilt: $\vdash_4 \Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$, also (da Γ_1 4-MCS)
$\Diamond\varphi \in \Gamma_1$.

□

16 Dienstag, 04.07.06

16.1 K ist in PSPACE

RECALL: Komplexität:
Entscheidungsprobleme: Σ Alphabet, $A \subset \Sigma^*$
Bekannte Probleme: CLIQUE (Graphentheorie), SAT, HALT (Terminierung von Programmen), ...
Ressourcen: Zeit, (Speicher-)Platz
Berechnungsmodelle: Turing-Maschine:

- deterministisch
- nicht deterministisch (angelic-choice [immer die richtige Wahl treffen])
- Kommt noch

Hirarchie (XSPACE: Platzverbrauch zusätzlich zur Eingabe ist X der Eingabegröße, XTIME Zeitverbrauch ist X)
(N meint immer nichtdeterministisch,LOG logarithmisch, P poliniomell, EXP exponentiell, REC rekursiv, R.E. Rekursiv Aufzählbar)

LOGSPACE $\subset$ NLOGSPACE $\subset$ PTIME (HORN) $\subset$ NPTIME(SAT,(S4.3)) $\subset$ PSPACE (K, S4) = NPSPACE [Satz von Savitch] $\subset$ $\subset$ EXPTIME (Prop. Dynamische Logik) $\subset \ldots \subset$ REC $\subset$ R.E

- NP: Übliche Problemstellung: $\exists x.P(x)$ mit x poliniomell groß, $P \in$PTIME
- coNP: ($A \in coNP \Leftrightarrow \Sigma^* - A \in NP$)
  demonic-choice (Ding rät immer falsch)
  Übliche Problemstellung: $\forall x.P(x)$
- Alternierende Turing-Maschinen: abwechselnd angelic/demonic
  Übliche Problemstellung: $\forall w \forall x \exists \forall z \ldots P(w, x, y, z)$
  APTIME = PSPACE

K-SAT $= \{\varphi | \varphi$ erfüllbar$\}$

Definition: Eine Formelmenge Σ heißt abgeschlossen

1. Σ abgeschlossen unter Unterformeln
2. Σ abgeschlossen unter $\tilde{}$

$$mit$$

$\tilde{}\psi = \chi\, wenn \psi \equiv \neg\chi;\ \neg\psi,\ sonst.$

$\Sigma(\varphi)$ Abschluß von $\varphi 4$
$(\Sigma(\varphi) = \{\psi|\psi$ Unterformel von $\varphi\} \cup \{\neg\psi|\psi$ Unterformel von $\varphi\}$

$A \subset \Sigma(\varphi)$ heißt:

1. Atom, wenn
   (i) A konsistent.
   (ii) $A \subset B \subset \Sigma(\varphi)$, B konsistent $\Rightarrow A = B$
2. Hintikka, wenn
   (i) $\perp \notin A$
   (ii) $\neg\psi \in \Sigma(\varphi) \Rightarrow (\neg\psi \in A \Leftrightarrow \psi \notin A)$
   (iii) $\psi \wedge \chi \in \Sigma(\varphi) \Rightarrow (\psi \wedge \chi \in A \Leftrightarrow \psi \in A \wedge \chi \in A)$

(Jedes Atom ist Hintikka aber nicht anders herum)

$|\Sigma(\varphi)| \leq 2 \cdot |\varphi| \Rightarrow |A| \leq |\varphi|$
Anzahl der Atorm $\leq |\mathfrak{P}(\Sigma(\varphi))| \leq 2^{2\cdot|\varphi|}$ mit $\mathfrak{P}$ = Potenzmenge
Konstruktion eines baumförmigen Modells; Durchsuchen via Backtracking [Depth-First] (nur ein Zweig im Speicher). Dazu:

Definition: A Hintikka Menge: Forderung von A ist eine Menge $\{\psi\} \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ so dass $\Diamond\psi, \Box\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in A$

Lemma: φ erfüllbar $\Leftrightarrow \exists A \subset \Sigma(\varphi)$ Hintikka mit $\varphi \in A$ so dass jede Forderung $\psi \wedge \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ von A erfüllbar ist.

Beachte: Wenn $\psi\wedge\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n$ Forderung von A$\subset \Sigma(\varphi) \Rightarrow Rg(\psi\wedge\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n) < Rg(\varphi)$ mit $Rg()$ maximale Schachtlungstiefe von Modaloperatoren.

D.h. das Lemma liefert einen Algorithmus auf alternierender Turing-Maschine, dessen Laufzeit gerade gleich der Rekursionstiefe ist, die wiederum $\leq Rg(\varphi)$ ist. Also ist $K - SAT \in APTIME = PSPACE$

$W(\varphi)$:

1. Existentiell: Rate $A \subset \Sigma(\varphi)$ Hintikka mit $\varphi \in A$
2. Universell: Rate Forderung $\psi\wedge\varphi_1\wedge, \ldots, \wedge\varphi_n$ von A [Termination mit JA bei Rang 0]

3. Rufe $W(\psi \wedge \varphi_1 \wedge, \ldots, \wedge \varphi_n)$ auf

Beweis des Lemmas: $\chi = \psi \wedge \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ Forderung: n.V. Modell $\mathfrak{M}_\chi$, Welt w_χ mit $\mathfrak{M}_\chi, w_\chi \models \chi$
Wähle alle Rahmen, stelle diese nebeneinander und erzeuge einen Zustand A über diesen.
Setze $ARw_{\chi_i} \Leftrightarrow \forall \xi. \Box\xi \in A \Rightarrow \xi$„$\in$“$\chi_i$. Zeige: $\mathfrak{M}, w_{\chi_i} \models \xi \Leftrightarrow \mathfrak{M}_{\chi_i}, w_{\chi_i} \models \xi$
(*) $\mathfrak{M}, A \models \xi \Leftrightarrow \xi \in A$
Zu zeigen durch Induktion über ξ.

17 Montag, 10.07.06

17.1 Propositionale dynamische Logik (PDL)

Multimodale Logik über Menge Π von Programmen.

- Für $\pi \in \Pi$ $\langle \pi \rangle \varphi$: nach einer Ausführung von π gilt φ
- Für $\pi \in \Pi$ $[\pi] \varphi$: nach allen Ausführung von π gilt φ

$\Pi = B | \pi_1; \pi_2 | \pi_1 \cup \pi_2 | \pi^*$
Ein Rahmen heißt regulär, wenn

1. $R_{\pi_1;\pi_2} = R_{\pi_1} \circ R_{\pi_2} = \{(w, w'') | \exists w'.(w, w') \in R_{\pi_1}, (w', w'') \in R_{\pi_2}\}$
2. $R_{\pi_1 \cup \pi_2} = R_{\pi_1} \cup R_{\pi_2}$
3. $R_{\pi^*} = (R_\pi)^*$ (transitive Hülle)

Definition: φ ist PDL-Gültig, wenn φ in allen regulären Rahmen gilt.
Definition

- Starke Vollständigkeit: $\Phi \models \varphi$ impliziert $\Phi \vdash \varphi$ (Φ kann unendlich sein!)
- Schwache Vollständigkeit: $\models \varphi$ impliziert $\vdash \varphi$

Satz: PDL ist nicht kompakt.
(Kompakt = aus $\Phi \models \varphi$ folgt bereits $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$ mit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Phi$
Beweis: $\Phi = \{\langle a^* \rangle p, \neg p, \neg \langle a \rangle p, \neg \langle a \rangle \langle a \rangle p, \ldots\}$
Dann ist $\Phi = \models \bot$
Aber für $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Phi$ gilt $\{\varphi_1, \ldots \varphi_n\}$ erfüllbar,
also $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \not\models \bot$

□

Korollar: PDL ist nicht stark vollständig.
Beweis: Stark Vollständig impliziert kompakt.

□

17.2 Regelsystem für PDL

- (k): $[\pi](\varphi \to \psi) \to [\pi]\varphi \to [\pi]\psi$
- Modus Ponens
- Generalistion
- Uniforme Substitution
- Propositionale Tautologien
- $\langle\pi_1;\pi_2\rangle p \Leftrightarrow \langle\pi_1\rangle\langle\pi_2\rangle p$
- $\langle\pi_1 \cup \pi_2\rangle p \Leftrightarrow \langle\pi_1\rangle p \vee \langle\pi_2\rangle p$
- $\langle\pi^*\rangle p \Leftrightarrow (p \wedge \langle\pi\rangle\langle\pi^*\rangle p)$
- $[\pi^*](p \to [\pi] p) \to (p \to [\pi^*] p))$ (Induktions-Axiom oder Segerberg-Axiom)

Definition: Sei Σ eine Formelmenge. Σ heißt Fischer-Ladner-abgeschlossen, wenn gilt

1. Σ ist unter Teilformeln abgeschlossen.
2. $\langle\pi_1;\pi_2\rangle\varphi \in \Sigma \Rightarrow \langle\pi_1\rangle\langle\pi_2\rangle\varphi \in \Sigma$
3. $\langle\pi_1 \cup \pi_2\rangle\varphi \in \Sigma \Rightarrow \langle\pi_1\rangle\varphi \in \Sigma \vee \langle\pi_2\rangle\varphi \in \Sigma$
4. $\langle\pi^*\rangle \in \Sigma \Rightarrow \langle\pi\rangle\langle\pi^*\rangle\varphi \in \Sigma$

Recall: $\tilde{}\psi = \chi\, wenn \psi \equiv \neg\chi;\ \neg\psi,\ sonst.$

Definition: Σ heißt abgeschlossen, wenn Σ Fischer-Ladner-abgeschlossen und für $\varphi \in \Sigma$ und $\tilde{}\varphi \in \Sigma$

Definition: $\neg FL(\Sigma)$ ist die kleinste Abgeschlossene Menge mit $\Sigma \subseteq \neg FL(\Sigma)$

Satz: Σ endlich $\Rightarrow \neg FL(\Sigma)$ endlich!

Definition: Ein Σ-Atom ist eine maximal konsistente Teilmenge von $\neg GL(\Sigma)$. (Konsistent = Im Regelsystem ist $\perp$ nicht ableitbar)

Lemma: Sei A ein Σ-Atom.

1. Genau eines von φ oder $\neg p$ ist in A (für $\varphi \in \neg FL(\Sigma)$)
2. Für $\varphi \vee \psi \in \neg FL(\Sigma)$ gilt: $\varphi \vee \psi \in A \Leftrightarrow (\varphi \in A$ oder $\psi \in A)$
3. Für $\langle \pi_1; \pi_2 \rangle \varphi \in \neg FL(\Sigma)$ gilt $\langle \pi_1; \pi_2 \rangle \varphi \in A \Leftrightarrow \langle \pi_1 \rangle \langle \pi_2 \rangle \varphi \in A$
4. Für $\langle \pi_1 \cup \pi_2 \rangle \varphi \in \neg FL(\Sigma)$ gilt $\langle \pi_1 \cup \pi_2 \rangle \varphi \in A \Leftrightarrow \langle \pi_1 \rangle \varphi \in A$ oder $\langle \pi_2 \rangle \varphi \in A$
5. Für $\langle \pi^* \rangle \varphi \in \neg FL(\Sigma)$ gilt $\langle \pi^* \rangle \varphi \in A \Leftrightarrow \langle \pi \rangle \langle \pi^* \rangle \varphi \in A$

Σ-Atome sind die Welten in kanonischen Modellen.

18 Dienstag, 11.07.06

Definition (Kanonisches Modell): Das kanonische Modell für eine endliche Menge Σ von PDL Formeln besteht aus:
$W = \{$Menge der Σ-Atome$\}$
$AS_\pi^\Sigma B \Leftrightarrow \hat{A} \wedge \langle \pi \rangle \hat{B}$ konsistent mit $\hat{A} = \bigwedge_{\varphi \in A} \varphi$
$V(p) = \{A | p \in A\}$

Σ-Atom = Maximal konsistente Formelmenge in $\neg FL(\Sigma)$ Für Σ endlich ist $\neg FL(\Sigma)$ endlich.

Wir brauchen für schwache Vollständigkeit

- Wahrheitslemma $\mathfrak{M}, A \models \psi \Leftrightarrow \psi \in A$
- $\mathfrak{M}$ regulär (d.h. $R_{\pi_1;\pi_2} = R_{\pi_1} R_{\pi_2} etc.$)

Dann ist PDL schwach vollständig.

Sei φ eine Formel mit $\models \varphi$. Dann ist $\neg\varphi$ unerfüllbar.
Angenommen $\neg\varphi$ wäre konsistent. Dann wäre es ein Atom A mit $\neg\varphi \in A$
Im kanonischen Modell $\mathfrak{M}$ gilt nach dem Wahrheitslemma $\mathfrak{M}, A \models \neg\varphi$.
WIEDERSPRUCH zur Unerfüllbarkeit von $\neg\varphi$.

Also kann $\neg\varphi$ nicht konsistent sein. D.h. also $\neg\varphi$ ist inkonsistent. Also $\neg\varphi \vdash \bot$, also $\vdash \neg\varphi \rightarrow \bot$, also $\vdash \varphi$

$\square$

Problem: $((W, S), V)$ erfüllt das Warheitslemma, ist aber nicht regulär.
Deshalb: Modifikation.

$R_a = S_a$
$R_{\pi_1;\pi_2} = R_{\pi_1}; R_{\pi_2}$
$R_{\pi_1 \cup \pi_2} = R_{\pi_1} \cup R_{\pi_2}$
$R_{\pi^*} = (R_\pi)^*$

Offensichtlich ist ((W,R),V) regulär.

Zentral für das Wahrheitslemma:
Existenzlemma (für Basisprogramme): Sei A ein Atom, a Basisprogramm. Für alle $\langle a \rangle \psi \in \neg FL(\Sigma)$ gilt $\langle a \rangle \psi \in A$ gdw. es existiert Atom B mit AR_aB und $\psi \in B$.

Beweis $\Leftarrow$
Sei also AR_aB und $\psi \in B$. Zu zeigen: $\langle a \rangle \psi \in A$.
$AR_aB \Rightarrow AS_aB \Rightarrow \hat{A} \wedge \langle a \rangle \hat{B}$ konsistent.
Da $\psi \in B$, gilt auch $\hat{A} \wedge \langle a \rangle \psi$ konsistent (schwächer).
Da $\langle a \rangle \psi \in \neg FL(\Sigma)$ und A maximal konsistent in $\neg FL(\Sigma)$
Also ist $\langle a \rangle \psi \in A$.

$\square$

Beweis $\Rightarrow$
Sei $\langle a \rangle \psi \in A$. Wir konstruieren B mit AR_a und $\psi \in B$ durch „forcing choices“: Sei $\neg FL(\Sigma) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ und $B_0 = \{\psi\}$. $\hat{A} \wedge \langle a \rangle \hat{B}_0$ konsistent.
Wenn B_i definiert ist mit $\hat{A} \wedge \langle a \rangle \hat{B}_i$ konsistent, definiere B_{i+1} wie folgt:

$\langle a \rangle \hat{B}_i \Leftrightarrow \langle a \rangle ((\hat{B}_i \wedge \sigma_{i+1}) \vee (\hat{B}_i \wedge {\sim}\sigma_{i+1})) \Leftrightarrow (\langle a \rangle (\hat{B}_i \wedge \sigma_{i+1}) \vee \langle a \rangle (\hat{B}_i \wedge {\sim}\sigma_{i+1}))$ konsistent.
Also ist $\hat{A} \wedge \langle a \rangle (\hat{B}_i \wedge \sigma_{i+1}))$ konsistent oder $(\hat{A} \wedge \langle a \rangle (\hat{B}_i \wedge {\sim}\sigma_{i+1})$.
Im ersten Fall sei $B_{i+1} := B_i \cup \{\sigma_{i+1}\}$.
Im zweiten Fall sei $B_{i+1} := B_i \cup \{{\sim}\sigma_{i+1}\}$.

$B := B_n$ ist maximal konsistent (also Atom) und $\psi \in B$ und AR_aB weil $\hat{A} \wedge \langle a \rangle \hat{B}$ konsistent.

$\square$

Lemma: $S_{\pi^*} \subseteq (S_\pi)^*$.

Sei also $AS_{\pi^*}B$. Zu zeigen: Wir kommen in endlich vielen S_π-Schritten von A nach B, d.h. $A(S_\pi)^*B$.
Sei $\mathfrak{D} = \{D | A(S_\pi)^*D\}$. Zu zeigen $B \in \mathfrak{D}$
Sei $\delta = \bigvee_{D \in \mathfrak{D}} \hat{D}$
Annahme: $\delta \wedge \langle \pi \rangle \neg\delta$ konsistent.
Dann gibt es Atom $E \notin \mathfrak{D}$ mit $\delta \wedge \langle p \rangle \hat{E}$ konsistent.

Also gibt es ein $D \in \mathfrak{D}$ mit $\hat{D} \wedge \langle\pi\rangle \hat{E}$ konsistent, d.h.
$DS_\pi E$.
Also $E \in \mathfrak{D}$
WIEDERSPRUCH
Deshalb ist die Annahme falsch. Also ist $\delta \wedge \langle\pi\rangle \neg\delta$ inkonsistent.
Also $\vdash \delta \rightarrow \neg \langle\pi\rangle \neg\delta$
d.h. $\vdash \delta \rightarrow [\pi]\, \delta$
Nach Generalisierung:
$\vdash [\pi^*]\, (\delta \rightarrow [\pi]\, \delta)$
Nach Segerberg-Axiom (Induktions-Axiom):
$\vdash \delta \rightarrow [\pi^*]\, \delta$
Nach Definition $\mathfrak{D}$ ist $A \in \mathfrak{D}$, also
$\vdash \hat{A} \rightarrow \delta$
$\vdash \hat{A} \rightarrow [\pi^*]\, \delta$.
Nach Anfangs-Annahme ist $\hat{A} \wedge \langle\pi^*\rangle \hat{B}$ konsistent.
Also auch $\hat{A} \wedge \langle\pi^*\rangle \hat{B} \wedge \delta$ konsistent.
Also ist für ein $D \in \mathfrak{D}$ auch $\hat{A} \wedge \langle\pi^*\rangle \hat{B} \wedge \hat{D}$ konsistent.
Daher auch $\hat{B} \wedge \hat{D}$ konsistent.
Nun sind B und D maximal konsistent. Also muß $B = D$ sein.
Also haben wir gezeigt, dass $B \in \mathfrak{D}$

□

Lemma: Für alle $\pi . S_\pi \subseteq R_\pi$.
Beweis: Induktion über π

- $\pi_1; \pi_2$ wende $\langle\pi_1; \pi_2\rangle \leftrightarrow \langle\pi_1\rangle \langle\pi_2\rangle p$ an.
- $\pi_1 \cup \pi_2$ wende $\langle\pi_1 \cup \pi_2\rangle \leftrightarrow \langle\pi_1\rangle p \vee \langle\pi_2\rangle p$ an.
- π^* wende obiges Lemma An. (Nach IV $(S_\pi)^* \subseteq (R_\pi)^*$)

□

Existenzlemma Sei A Atom, $\langle\pi\rangle \psi \in \neg FL(\Sigma)$.
Dann ist $\langle\pi\rangle \psi \in A$ gdw. es existiert ein B mit $AR_\pi B$ und $\psi \in B$.

Beweis $\Rightarrow$ Sei $\langle\pi\rangle \psi \in A$. Mit „forcing choices§ erhalten wir B mit $\hat{A} \wedge \langle\pi\rangle \hat{B}$ konsistent und $\psi \in B$. D.h. $AS_\pi B$. Nach Lemma $AR_\pi B$

□

Beweis $Leftarrow$ nutzt Fischer-Ladner Eigneschaft und $\langle pi^*\rangle p \leftrightarrow p \wedge \langle\pi\rangle \langle\pi^*\rangle p$

□

Wahreitslemma siehe oben

Induktion über ψ

$\langle \pi \rangle \psi$ mit Existenzlemma.
Induktion mit Eigneschaft der Atome aus letzter Vorlesung

□

19 Montag, 17.07.06

19.1 Algorithmus für PDL

Satz Erfüllbarkeit in PDL ist EXPTIME-hart.

Beweis: Durch Reduktion auf „Domino-Spiel“ (Siehe Buch)

Satz: Erfüllbarkeit in PDL ist in EXPTIME.

Korollar: Gültigkeit in PDL ist in EXPTIME.

Beweis (Korollar): φ gültig $\Leftrightarrow \neg\varphi$ nicht erfüllbar.

Beweis (Satz): durch Konstruktion eines Modelles aus Hintikka-Mengen.

Definition: Sei Σ eine endliche Menge von PDL-Formeln. Eine Hintikka-Menge für PDL ist eine maximale Menge $H \subseteq \neg FL(\Sigma)$ mit

1. Für $\neg\varphi \in \neg FL(\Sigma) : \neg\varphi \in H \Leftrightarrow \varphi \notin H$
2. Für $\varphi \wedge \psi \in \neg FL(\Sigma) : \varphi \wedge \psi \in H \Leftrightarrow \varphi \in H \wedge \psi \in H$
3. Für $\langle \pi_1; \pi_2 \rangle \varphi \in \neg FL(\Sigma) : \langle \pi_1; \pi_2 \rangle \varphi \in H \Leftrightarrow \langle \pi_1 \rangle \langle \pi_2 \rangle \varphi \in H$
4. Für $\langle \pi_1 \cup \pi_2 \rangle \varphi \in \neg FL(\Sigma) : (\langle \pi_1 \rangle \in H \vee \langle \pi_2 \rangle \in H$
5. Für $\langle \pi^* \rangle \in \neg FL(\Sigma) : \langle \pi^* \rangle \in H \Leftrightarrow (\varphi \in H \vee \langle \pi \rangle \langle \pi^* \rangle \varphi \in H$

Atome sind konsistente Hintikka Mengen

Definition: (Elemination von Hintikka-Mengen)
W^0 =alle Hintikka-Mengen über Σ
HQ_a^0H' gdw. für $\psi \in H'$ und $\langle a \rangle \psi \in \neg FL(\Sigma)$ gilt $\langle a \rangle \psi \in H$
Q_π^0 wird induktiv definiert.
$V^0(p) = \{H \in W_0 | p \in H\}$

$\mathfrak{M}^0 = ((W^0, Q^0), V^0)$

$H \in W^n$ heißt Forderungserfüllt, gdw. $\langle \pi \rangle \psi \in H \Rightarrow \exists H'$ mit $HQ_\pi^n H'$ und $\psi \in H'$

$W^{n+1} = \{H \in W^n | H \text{ forderungserfüllt}\}$
$Q^{n+1} = Q^n \cap W^{n+1} \times W^{n+1}$
$V^{n+1}(p) = V^n(p) \cap W^{n+1}$

Da es nur endlich viele Hintikka Mengen gibt, stoppt dieser Prozess für ein $m \geq 0$. Sei $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^m$

(*) Für $\varphi \in \Sigma$: φ erfüllbar, gdw. $\varphi \in H$ für ein $H \in W$.

Algorithmus: Gehe alle $H \in W$ durch und prüfe, ob $\varphi \in H$.

Beweis (*) $\Leftarrow$

Wir zeigen: Für alle $\varphi \in \neg FL(\Sigma), H \in W$: $\mathfrak{M}, H \models \psi$ gdw. $\varphi \in H$

Beweis durch Induktion über φ:

1. p klar.
2. $\neg\varphi$ Forderung 1. der Hintikka Definition.
3. $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ Forderung 2. der Hintikka Definition.
4. $\langle\pi\rangle\,\varphi$: Zu zeigen: $\mathfrak{M}, H \models \varphi$ gdw. $\langle\pi\rangle\,\varphi \in H$.
   Nach Def also: ($\exists H'$ mit $HQ_\pi H'$ und $\varphi \in H'$) gdw. $\langle\pi\rangle\,\varphi \in H$
   $\Leftarrow$: Folgt weil H forderungserfüllt.
   $\Rightarrow$: Per Induktion über π
   $\pi = a$: $HQ_aH', \varphi \in H' \Rightarrow$ (nach Def Q_a^0) $\langle a\rangle\,\varphi \in H$
   π^* : $HQ_{\pi^*}H'$, d.h. $H = H_0Q_\pi H_1 \ldots H_{n-1}Q_\pi H_n = H'$ und $\varphi \in H'$
   $\psi \in H' \Rightarrow$(H' Hintikka)$\langle\pi^*\rangle\,\varphi \in H_k \Rightarrow \langle\pi\rangle\,\langle\pi^*\rangle\,\varphi \in H_0 = H$
5. ähnlich
6. ähnlich

20 Dienstag, 11.07.06

Gestern haben wir definiert:

$\mathfrak{M} = ((W, Q), V)$

Φ erfüllbar gdw. ($\Phi \in H$ für ein $H \in W$)

Beweis $\Leftarrow$ Letzte Vorlesung.

Beweis $\Rightarrow$: Sei Φ erfüllbar.
Im Vollständigkeitsbeweis für die PDL hatten wir ein Modell $\mathfrak{P}$ über φ konstruiert.

$\mathfrak{P} = ((W', R'), V')$.

Nun gilt $W' \subseteq W^0$, weil Atome auch Hintikka-Mengen sind.

Weiterhin $R'_\pi \subseteq Q_\pi$.
Für a: AR_aB gdw. $\hat{A} \wedge \langle a \rangle \hat{B}$ konsistent.

Zu zeigen: AQ_aB.
Sei $\psi \in B, \langle a \rangle \psi \in \neg FL(\Sigma)$
Dann ist $\hat{A} \wedge \langle a \rangle \psi$ konsistent.
Wegen Maximalität von A ist $\langle a \rangle \psi \in A$.
Also ist AQ_aB.

Für andere π folgt $R'_\pi \subseteq Q_\pi$ per Induktion.

Korollar: Alle Atome sind Forderungserfüllt.
Beweis: Existenzlemma. (Forderungserfüllt heißt ExLemma gilt. Atome erfüllen dies!)

Also können Atome nie eleminiert werden! $\Rightarrow W' \subseteq W$

Nach dem Vollständigkeits-Satz gibt es ein Atom A mit $\mathfrak{P}, A \models \Phi$, und damit auch $\mathfrak{M}, a \models \Phi$

$\square$

20.1 Temporal Logik

Rahmen $(W, R, R^\cup)$ (Bidirektionale Rahmen)
$R^\cup = \{(U,V)|(V,U) \in R\}$ (konvers)

	$\square$	$\diamondsuit$
R	G	F
$R^\cup$	H	P

Axiomatisierung der bidirektionalen Rahmen:
$p \rightarrow HFp$
$p \rightarrow GPp$

Nachteil: Wir können nur über den folgenden Zeitpunkt sprechen.

20.2 Lineare Temporale Logik (LTL)

Syntax: $\Phi := \perp | p | \neg\Phi | \Phi_1 \vee \Phi_2 | X\Phi | F\Phi | G\Phi | \Phi_1 \cup \Phi_2 | \Phi_1 W \Phi_2 | \Phi_1 R \Phi_2$

Beispiele:

- $G(request \rightarrow Facknowledge)$
- p ist unendlich oft „enabled“ GFp
- $G(floor2 \wedge directionUpbuttonpressed5 \rightarrow (directionup \cup floor5))$

Semantik: Modell $\mathfrak{M} = (W, R, V)$
Ein Pfad π ist eine unendliche Folge von Welten $w_1Rw_2Rw_3R\dots$
π^n sei der Teilpfad $w_nRw_{n+1}R\dots$
Sei $\pi_n = w_n$

- $\mathfrak{M}\pi \not\models \bot$
- $\mathfrak{M}, \pi \models p$ gdw. $\pi_1 \in V(p)$
- $\mathfrak{M}, \pi \models \neg\Phi$ gdw. $\mathfrak{M}, \pi \not\models \Phi$
- $\mathfrak{M}, \pi \models (\Phi_1 \vee \Phi_2)$ gdw. $\mathfrak{M}, \pi \models \Phi_1 \vee \mathfrak{M}, \pi \models \Phi_2$
- $\mathfrak{M}, \pi \models X\Phi$ gdw. $\mathfrak{M}, \pi^2 \models \Phi$
- $\mathfrak{M}, \pi \models F\Phi$ gdw. für ein $i \geq 1 : \mathfrak{M}, \pi^i \models \Phi$
- $\mathfrak{M}, \pi \models G\Phi$ gdw. für alle $i \geq 1 : \mathfrak{M}, \pi^i \models \Phi$
- $\mathfrak{M}, \pi \models \Phi_1 \cup \Phi_2$ gdw. $\exists i \geq 1$ mit $\mathfrak{M}, \pi^k \models \Phi_1$ für alle $1 \leq k \leq i-1$ und $\mathfrak{M}, \pi^i \models \Phi_2$
- $\mathfrak{M}, \pi \models \Phi_1 W \Phi_2$ gdw. $\mathfrak{M}, \pi \models (\Phi_1 \cup \Phi_2) \vee G\Phi_1$
- $\mathfrak{M}, \pi \models \Phi_1 R \Phi_2$ gdw. $\exists i \geq 1$ mit $\mathfrak{M}, \pi^k \models \Phi_2$ für alle $1 \leq k \leq i$ und $\mathfrak{M}, \pi^i \models \Phi_1$ oder für alle $i \geq 1 \mathfrak{M}, \pi^i \models \Phi_2$

Satz:

- $\neg G\varphi \Leftrightarrow F\neg\varphi$
- $\neg F\varphi \Leftrightarrow G\neg\varphi$
- $\neg X\varphi \Leftrightarrow X\neg\varphi$
- $\neg(\varphi \cup \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi R \neg\psi$
- $\neg(\varphi R \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \cup \neg\psi$
- $\varphi W \psi \Leftrightarrow \varphi \cup \psi \vee G\Phi$
- $F\Phi = \top \cup \Phi$
- $G\Phi = \Phi W \bot$