Natürliches Schließen: Aussagenlogik I

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}\ \wedge I \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ \wedge E_1 \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge E_2$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\phi \longrightarrow \psi}\ \longrightarrow I \qquad \frac{\phi \quad \phi \longrightarrow \psi}{\psi}\ \longrightarrow E$$

$$\frac{\bot}{\phi}\ \bot \qquad \frac{\begin{array}{c}[\phi \longrightarrow \bot]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\phi}\ \mathsf{raa}$$

Natürliches Schließen: Aussagenlogik II

$$\phi \vee \psi \equiv \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi) \quad \frac{\phi}{\phi \vee \psi}\,\vee I_1 \quad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\,\vee I_2 \quad \frac{\phi \vee \psi \quad \begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \sigma\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots\\ \sigma\end{array}}{\sigma}\,\vee E$$

$$\neg\phi \equiv \phi \longrightarrow \bot \qquad \frac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\phi}\,\neg I \quad \frac{\phi \quad \neg\phi}{\bot}\,\neg E$$

$$\phi \longleftrightarrow \psi \equiv (\phi \longrightarrow \psi) \wedge (\psi \longrightarrow \phi)$$

$$\frac{\phi \longrightarrow \psi \quad \psi \longrightarrow \phi}{\phi \longleftrightarrow \psi}\,\longleftrightarrow I \quad \frac{\phi \quad \phi \longleftrightarrow \psi}{\psi}\,\longleftrightarrow E_1 \quad \frac{\psi \quad \phi \longleftrightarrow \psi}{\phi}\,\longleftrightarrow E_2$$

Natürliches Schließen: Prädikatenlogik I (Quantoren)

$$\frac{\phi}{\forall x.\phi}\ \forall I \quad (*) \qquad\qquad \frac{\forall x.\phi}{\phi\left[\begin{smallmatrix} t \\ x \end{smallmatrix}\right]}\ \forall E \quad (\dagger)$$

$$\exists x.\phi \overset{\mathit{def}}{=} \neg\forall x.\neg\phi$$

$$\frac{\phi\left[\begin{smallmatrix} t \\ x \end{smallmatrix}\right]}{\exists x.\phi}\ \exists I \quad (\dagger) \qquad\qquad \frac{\exists x.\phi \qquad \begin{array}{c}[\phi] \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\psi}\ \exists E \quad (*)$$

- [(*)] Eigenvariablenbedingung:
  x nicht frei in offenen Vorbedingungen von ϕ
- [(†)] Ggf. Umbenennung in t (durch Substitution)

Natürliches Schließen: Prädikatenlogik II (Gleichheit)

- Reflexivität, Symmetrie, Transitivität:

$$\frac{}{x = x}\ \text{refl} \qquad \frac{x = y}{y = x}\ \text{sym} \qquad \frac{x = y \quad y = z}{x = z}\ \text{trans}$$

- Kongruenz:

$$\frac{x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n}{f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)}\ \text{conf}$$

- Substitutivität:

$$\frac{x_1 = y_1, \ldots, x_m = y_m \quad P(x_1, \ldots, x_n)}{P(y_1, \ldots, y_m)}\ \text{subst}$$