Techniken zur Entwicklung Korrekter Software 1
Vorlesung vom 03/04.12.07: Aussagenlogik und natürliches Schließen

Christoph Lüth & Lutz Schröder

WS 07/08

Wo sind wir?

- Woche 1: Einführung
- Woche 2– 6: CASL
- Woche 7– 11: Formales Beweisen:
  - Aussagenlogik
  - Prädikatenlogik
  - Logik höherer Stufe
  - Isabelle/HOL
- Woche 12– 14: Formales Beweisen & Entwicklung mit CASL

Fahrplan

- Einführung in die formale Logik
- Aussagenlogik
  - Beispiel für eine einfache Logik
  - Guter Ausgangspunkt
- Natürliches Schließen
  - Wird auch von Isabelle verwendet.
- Buchempfehlung:
  Dirk van Dalen: Logic and Structure. Springer Verlag, 2004.

Formale Logik

- Ziel: Formalisierung von Folgerungen wie

  Wenn es regnet, wird die Straße nass.

Formale Logik

- Ziel: Formalisierung von Folgerungen wie

  Wenn es regnet, wird die Straße nass.
  Es regnet.

Formale Logik

- Ziel: Formalisierung von Folgerungen wie

  Wenn es regnet, wird die Straße nass.
  Es regnet.
  Also ist die Straße nass.

  Nachts ist es dunkel.

Formale Logik

- Ziel: Formalisierung von Folgerungen wie

Wenn es regnet, wird die Straße nass.
Es regnet.
Also ist die Straße nass.

Nachts ist es dunkel.
Es ist hell.

Formale Logik

- Ziel: Formalisierung von Folgerungen wie

Wenn es regnet, wird die Straße nass.
Es regnet.
Also ist die Straße nass.

Nachts ist es dunkel.
Es ist hell.
Also ist es nicht nachts.

- Eine Logik besteht aus
  - Einer Sprache $\mathcal{L}$ von Formeln (Aussagen)
  - Schlußregeln (Folgerungsregeln) auf diesen Formeln.

Damit: Gültige ("wahre") Aussagen berechnen.

Beispiel für eine Logik

- Sprache $\mathcal{L} = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$

Beispiel für eine Logik

- Sprache $\mathcal{L} = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$
- Schlußregeln:

$$\frac{\diamondsuit}{\clubsuit}\,\alpha \qquad \frac{\diamondsuit}{\spadesuit}\,\beta \qquad \frac{\clubsuit \quad \spadesuit}{\heartsuit}\,\gamma \qquad \frac{\begin{array}{c}[\diamondsuit]\\ \vdots \\ \heartsuit\end{array}}{\heartsuit}\,\delta$$

- Beispielableitung: $\heartsuit$

Aussagenlogik

Sprache $\mathcal{P}rop$ gegeben durch:

- Variablen $V \subseteq \mathcal{P}rop$ (Menge V gegeben)
- $\bot \in \mathcal{P}rop$
- Wenn $\phi, \psi \in \mathcal{P}rop$, dann $\phi \wedge \psi \in \mathcal{P}rop$, $\quad \phi \vee \psi \in \mathcal{P}rop$,
  $\phi \longrightarrow \psi \in \mathcal{P}rop$, $\quad \phi \longleftrightarrow \psi \in \mathcal{P}rop$
- Wenn $\phi \in \mathcal{P}rop$, dann $\neg\phi \in \mathcal{P}rop$.

Wann ist eine Formel gültig?

- Semantische Gültigkeit $\models P$: Wahrheitstabellen, Modelle
  - Siehe CASL-Semantik, wird hier nicht weiter verfolgt
- Syntaktische Gültigkeit $\vdash P$: formale Ableitung,
  - Natürliches Schließen
  - Sequenzenkalkül
  - Andere (Hilbert-Kalkül, gleichungsbasierte Kalküle, etc.)

Natürliches Schließen

- Vorgehensweise:
  - Erst Kalkül nur für $\wedge, \longrightarrow, \bot$,
  - dann Erweiterung auf alle Konnektive.
- Für jedes Konnektiv: Einführungs- und Eliminitationsregel
- NB: konstruktiver Inhalt der meisten Regeln

Natürliches Schließen — Die Regeln

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge I \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge E_1 \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge E_2$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi] \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\phi \longrightarrow \psi} \longrightarrow I \qquad \frac{\phi \quad \phi \longrightarrow \psi}{\psi} \longrightarrow E$$

$$\frac{\bot}{\phi} \bot \qquad \frac{\begin{array}{c}[\phi \longrightarrow \bot] \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\phi} \text{raa}$$

Konsistenz

Def: Γ konsistent gdw. es gibt ein Modell M für Γ

Lemma: Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Γ konsistent

(ii) Es gibt kein ϕ so dass $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \neg\phi$

(iii) $\Gamma \nvdash \bot$

Satz: Aussagenlogik mit natürlichem Schließen ist konsistent.

Die fehlenden Konnektive

- Einführung als Abkürzung:

$$\neg\phi \stackrel{def}{=} \phi \longrightarrow \bot$$

$$\phi \vee \psi \stackrel{def}{=} \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$$

$$\phi \longleftrightarrow \psi \stackrel{def}{=} (\phi \longrightarrow \psi) \wedge (\psi \longrightarrow \phi)$$

- Ableitungsregeln als Theoreme.

Die fehlenden Schlußregeln

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ \vee I_1 \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\ \vee I_2$$

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \sigma\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots\\ \sigma\end{array}}{\sigma}\ \vee E$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\phi}\ \neg I$$

$$\frac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}\ \neg E$$

$$\frac{\phi \longrightarrow \psi \qquad \psi \longrightarrow \phi}{\phi \longleftrightarrow \psi}\ \longleftrightarrow I$$

$$\frac{\phi \qquad \phi \longleftrightarrow \psi}{\psi}\ \longleftrightarrow E_1 \qquad \frac{\psi \qquad \phi \longleftrightarrow \psi}{\phi}\ \longleftrightarrow E_2$$

Zusammenfassung

- Formale Logik formalisiert das (natürlichsprachliche) Schlußfolgern
- Logik: Aussagen plus Schlußregeln (Kalkül)
- Aussagenlogik: Aussagen mit $\wedge$, $\longrightarrow$, $\bot$
  - $\neg$, $\vee$, $\longleftrightarrow$ als abgeleitete Operatoren
- Natürliches Schließen: intuitiver Kalkül
- Aussagenlogik konsistent, vollständig, entscheidbar.
- Nächstes Mal: Quantoren, HOL.