

Techniken zur Entwicklung Korrekter Software 1  
Vorlesung vom 10/11.12.07:  
Prädikatenlogik erster Stufe  
(Vom Umgang mit Quantoren)

Christoph Lüth & Lutz Schröder

WS 07/08



# Wo sind wir?

- Aussagenlogik
- Prädikatenlogik
- Logik höherer Stufe
- Isabelle/HOL

# Fahrplan

- Logik mit **Quantoren**
- Von Aussagenlogik zur Prädikatenlogik
- **Natürliches Schließen** mit Quantoren
- Die Notwendigkeit von Logik höherer Stufe

# Prädikatenlogik

- **Beschränkung** der Aussagenlogik:  
Alle Quadratzahlen sind positiv,

# Prädikatenlogik

- **Beschränkung** der Aussagenlogik:  
Alle Quadratzahlen sind positiv, 9 ist eine Quadratzahl,

# Prädikatenlogik

- **Beschränkung** der Aussagenlogik:  
Alle Quadratzahlen sind positiv, 9 ist eine Quadratzahl,  
also ist 9 positiv.  
**Nicht** in Aussagenlogik **formalisierbar**.

# Prädikatenlogik

- **Beschränkung** der Aussagenlogik:  
Alle Quadratzahlen sind positiv, 9 ist eine Quadratzahl,  
also ist 9 positiv.  
**Nicht** in Aussagenlogik **formalisierbar**.
- **Ziel:** Formalisierung von Aussagen wie  
Alle Zahlen sind ein Produkt von Primfaktoren.  
Es gibt keine größte Primzahl.

# Erweiterung der Sprache

- **Terme** beschreiben die zu formalisierenden Objekte.
- **Formeln** sind logische Aussagen.
- Unser **Alphabet**:
  - **Prädikatensymbole**:  $P_1, \dots, P_n, \dot{=}$  mit **Arität**  $ar(P_i) \in \mathbb{N}$ ,  $ar(\dot{=}) = 2$
  - **Funktionssymbole**:  $f_1, \dots, f_m$  mit **Arität**  $ar(t_i) \in \mathbb{N}$
  - Menge  $X$  von **Variablen** (abzählbar viele)
  - **Konnektive**:  $\wedge, \longrightarrow, \perp, \forall$ , **abgeleitet**:  $\vee, \longleftrightarrow, \neg, \longleftarrow, \exists$

# Terme

Menge *Term* der **Terme** gegeben durch:

- Variablen:  $X \subseteq \mathcal{Term}$
- Funktionssymbol  $f$  mit  $ar(f) = n$  und  $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{Term}$ , dann  $f(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{Term}$
- Sonderfall:  $n = 0$ , dann ist  $f$  eine **Konstante**,  $f \in \mathcal{Term}$

# Formeln

Menge  $\mathcal{Form}$  der **Formeln** gegeben durch:

- $\perp \in \mathcal{Form}$
- Wenn  $\phi \in \mathcal{Form}$ , dann  $\neg\phi \in \mathcal{Form}$
- Wenn  $\phi, \psi \in \mathcal{Form}$ , dann  $\phi \wedge \psi \in \mathcal{Form}$ ,  $\phi \vee \psi \in \mathcal{Form}$ ,  
 $\phi \longrightarrow \psi \in \mathcal{Form}$ ,  $\phi \longleftrightarrow \psi \in \mathcal{Form}$

# Formeln

Menge *Form* der **Formeln** gegeben durch:

- $\perp \in \mathcal{Form}$
- Wenn  $\phi \in \mathcal{Form}$ , dann  $\neg\phi \in \mathcal{Form}$
- Wenn  $\phi, \psi \in \mathcal{Form}$ , dann  $\phi \wedge \psi \in \mathcal{Form}$ ,  $\phi \vee \psi \in \mathcal{Form}$ ,  
 $\phi \longrightarrow \psi \in \mathcal{Form}$ ,  $\phi \longleftrightarrow \psi \in \mathcal{Form}$
- Wenn  $\phi \in \mathcal{Form}, x \in X$ , dann  $\forall x.\phi \in \mathcal{Form}, \exists x.\phi \in \mathcal{Form}$
- Prädikatensymbol  $p$  mit  $ar(p) = m$  und  $t_1, \dots, t_m \in \mathcal{Term}$ , dann  $p(t_1, \dots, t_m) \in \mathcal{Form}$ 
  - Sonderfall:  $t_1, t_2 \in \mathcal{Term}$ , dann  $t_1 \doteq t_2 \in \mathcal{Form}$

# Beispielaussagen

- Alle Zahlen sind gerade oder ungerade.

# Beispielaussagen

- Alle Zahlen sind gerade oder ungerade.
- Keine Zahl ist gerade und ungerade.

# Beispielaussagen

- Alle Zahlen sind gerade oder ungerade.
- Keine Zahl ist gerade und ungerade.
- Es gibt keine größte Primzahl.

# Beispielaussagen

- Alle Zahlen sind gerade oder ungerade.
- Keine Zahl ist gerade und ungerade.
- Es gibt keine größte Primzahl.
- Für jede Primzahl gibt es eine, die größer ist.

# Beispielaussagen

- Alle Zahlen sind gerade oder ungerade.
- Keine Zahl ist gerade und ungerade.
- Es gibt keine größte Primzahl.
- Für jede Primzahl gibt es eine, die größer ist.
- Eine Funktion  $f$  ist stetig an der Stelle  $x_0$ , gdw. es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < \delta$  gilt  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

# Freie und gebundene Variable

- Variablen in  $t \in \mathcal{Term}$ ,  $p \in \mathcal{Form}$  sind **frei**, **gebunden**, oder **bindend**.
  - $x$  **bindend** in  $\forall x.\phi$ ,  $\exists x.\psi$
  - Für  $\forall x.\phi$ ,  $\exists x.\phi$  ist  $x$  in Teilformel  $\phi$  **gebunden**
  - Ansonsten ist  $x$  **frei**
- $FV(\phi)$ : Menge der **freien** Variablen in  $\phi$
- Beispiel:

$$(q(x) \vee \exists x.\forall y.p(f(x), z) \wedge q(a)) \vee \forall r(x, z, g(x))$$

# Natürliches Schließen mit Quantoren

$$\frac{\phi}{\forall x.\phi} \forall I \quad (*) \qquad \frac{\forall x.\phi}{\phi \left[ \begin{smallmatrix} t \\ x \end{smallmatrix} \right]} \forall E \quad (\dagger)$$

- $[(*)]$  **Eigenvariablenbedingung:**  
x nicht **frei** in **offenen** Vorbedingungen von  $\phi$
- $[(\dagger)]$  Ggf. **Umbenennung** in  $t$  (durch Substitution)
- **Gegenbeispiele** für verletzte Seitenbedingungen (van Dalen S. 92)

# Ersetzung

- $t \left[ \begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right]$  ist **Ersetzung** von  $x$  durch  $s$  in  $t$
- Definiert durch strukturelle **Induktion**:

$$y \left[ \begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} s & x = y \\ y & x \neq y \end{cases}$$

$$f(t_1, \dots, t_n) \left[ \begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right] \stackrel{\text{def}}{=} f(t_1 \left[ \begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right], \dots, t_n \left[ \begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right])$$

$$\perp \left[ \begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right] \stackrel{\text{def}}{=} \perp$$

$$(\phi \wedge \psi) \left[ \begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right] \stackrel{\text{def}}{=} \phi \left[ \begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right] \wedge \psi \left[ \begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right]$$

$$(\phi \longrightarrow \psi) \left[ \begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right] \stackrel{\text{def}}{=} \phi \left[ \begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right] \longrightarrow \psi \left[ \begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right]$$

$$p(t_1, \dots, t_n) \left[ \begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right] \stackrel{\text{def}}{=} p(t_1 \left[ \begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right], \dots, t_n \left[ \begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right])$$

$$(\forall y. \phi) \left[ \begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \forall y. \phi & x = y \\ \forall y. (\phi \left[ \begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right]) & x \neq y, y \notin FV(s) \\ \forall z. ((\phi \left[ \begin{smallmatrix} z \\ y \end{smallmatrix} \right]) \left[ \begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right]) & x \neq y, z \notin FV(s) \text{ (z frisch)} \end{cases}$$

# Der Existenzquantor

$$\exists x.\phi \stackrel{\text{def}}{=} \neg\forall x.\neg\phi$$

$$\frac{\phi \left[ \frac{t}{x} \right]}{\exists x.\phi} \exists I \quad (\dagger) \qquad \frac{\begin{array}{c} [\phi] \\ \vdots \\ \exists x.\phi \quad \psi \end{array}}{\psi} \exists E \quad (*)$$

- **[(\*)] Eigenvariablenbedingung:**  
x nicht frei in  $\psi$ , oder einer offenen Vorbedingung außer  $\phi$
- **[(†)] Ggf. Umbenennung durch Substitution**

# Regeln für die Gleichheit

- Reflexivität, Symmetrie, Transitivität:

$$\frac{}{x = x} \text{ refl} \qquad \frac{x = y}{y = x} \text{ sym} \qquad \frac{x = y \quad y = z}{x = z} \text{ trans}$$

- Kongruenz:

$$\frac{x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n}{f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)} \text{ conf}$$

- Substitutivität:

$$\frac{x_1 = y_1, \dots, x_m = y_m \quad P(x_1, \dots, x_n)}{P(y_1, \dots, y_m)} \text{ subst}$$

# Zusammenfassung

- **Prädikatenlogik**: Erweiterung der Aussagenlogik um
  - Konstanten- und Prädikatensymbole
  - Gleichheit
  - Quantoren
- Das **natürliche Schließen** mit Quantoren
  - Variablenbindungen — Umbenennungen bei Substitution
  - Eigenvariablenbedingung
- Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe:
  - z.B. Peano-Axiome
- Deshalb das nächste Mal: **Logik höherer Stufe**
  - Die ganze Mathematik in sieben Axiomen.