

# Global konsistente visuelle Lokalisation ohne vorgegebene Karte

U. Frese, M. Hörmann, B. Bäuml und G. Hirzinger

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR)  
Institut für Robotik und Systemdynamik  
Postfach 1116, D-82230 Weßling  
<http://www.robotic.dlr.de/MOBILE>

**Zusammenfassung** Wir präsentieren ein Verfahren, das als Teil des visuellen Lokalisationssystems eines mobilen Roboters dessen Position ohne eine vorab gegebene Karte bestimmen kann. Es erhält von einem Bildverarbeitungsmodul, das nicht Gegenstand dieses Artikels ist, die Bildpositionen punktförmiger Umgebungsmerkmale, sogenannter Landmarken. Aus den daraus resultierenden Winkelmessungen und der Odometrie bildet es ein Netz von unscharfen räumlichen Beziehungen, das als Graph repräsentiert wird. Die Beziehungen werden metrisch auf den Kanten angegeben. Die Unschärfe wird hierbei mengenbasiert mit Ellipsen und Hyperbeln modelliert. Für die Lokalisation löst dieser Ansatz die Konsistenzprobleme, die beim autonomen Aufbau weiträumiger Karten entstehen.

## 1 Problematik

Für die Navigation autonomer mobiler Roboter ist eine zuverlässige Lokalisation, d. h. die Bestimmung von Position und Orientierung, eine Grundvoraussetzung, die in der Vergangenheit Gegenstand zahlreicher Untersuchungen war. Basis der Lokalisation sind Sensoren, die metrische Beziehungen des Roboters zur Umgebung messen. Für die meistverwendeten Sensoren sind dies die odometrische Relativlage, der Abstand zu einer Wand (Laserscanner, Ultraschall) oder der Winkel zu einer visuellen Landmarke (Kamera). Die Gesamtheit dieser Messungen bildet ein Netz von metrischen Beziehungen. Viele Systeme fordern eine vorab gegebene Karte (Gebäudeplan), in der die Umgebung des Roboters bzgl. eines globalen Koordinatensystems eingetragen ist [Han97,Yag95]. Damit kann eine Positionsschätzung im Koordinatensystem gehalten und mit jeder Messung aktualisiert werden. Die Aktualisierung erfolgt meist stochastisch mit dem Extended Kalman Filter (EKF) [Yag95] oder mengenbasiert [Han97,Sch68].

Verzichtet man auf eine vorab gegebene Karte, so müssen neue Landmarken bzgl. der aktuellen Roboterposition eingemessen werden, und die Relokalisation der Roboterposition muß in Bezug auf bekannte Landmarken erfolgen. Dadurch akkumulieren sich Meßfehler so stark, daß es nicht mehr möglich ist, mit unsicheren globalen Koordinaten zu arbeiten. Es muß vielmehr repräsentiert werden

können, daß z. B. die absolute Lage zweier Punkte nur sehr ungenau, ihre Relativlage aber genau bekannt ist. Im Prinzip leistet dies der EKF bei Mitnahme der kompletten Kovarianzmatrix. Konkret scheitert er aber an der Linearisierung der Drehung um den jeweiligen Orientierungsschätzwert, dessen Fehler durchaus größer als  $90^\circ$  sein kann.

In [Thr96,Wei94] werden zwei Verfahren beschrieben, die sich bzgl. einer autonom erstellten Karte relokalisieren. Beide Verfahren tragen Entfernungsinformationen (z. B. Laserscans) bzgl. eines globalen Koordinatensystems unter Vernachlässigung der Unsicherheit in eine Karte ein. Daraus ergeben sich bei großen Gebäuden Konsistenzprobleme, wenn sich z. B. zwei eigentlich parallele Gänge in der Karte überlappen. Die Problematik entschärft [Thr96] durch die Annahme, daß Wände (im wesentlichen) senkrecht aufeinander stehen. Dadurch wird die Orientierungsdrift beseitigt und die Odometrie dramatisch verbessert.

Gutmann [Gut99] präsentiert als Erweiterung von [Lu97] das erste System, das sich in einer selbsterstellten global konsistenten Karte relokaliert. Es benötigt allerdings kubische Rechenzeit und linearen Speicher in der Zahl der Laserscans, die während der Kartierungsphase aufgenommen werden, unabhängig davon, ob diese in schon kartiertem Terrain liegen. (Der bei [Lu97] vorgeschlagene Weg, die Karte zu verkleinern, setzt an sich unsichere Beziehungen als sicher und liefert dadurch zu optimistische Fehlervarianzen.)

## 2 Graph räumlicher Beziehungen

### 2.1 Aufbau

Unser System verwendet Odometrie und Winkelmessungen zu visuellen Landmarken, die von einem Bildverarbeitungsmodul geliefert werden. Die Idee ist, nicht die Messungen unmittelbar in einem Zustandsschätzer zu integrieren, sondern das aus den Messungen entstehende Netz metrischer Beziehungen zu speichern. Dies erfolgt in einem Graphen dessen Knoten die Landmarken (als Position) sowie aktuelle und frühere Roboterpositionen (als Position mit Orientierung) repräsentieren. Die Knoten selbst enthalten allerdings keine Information (etwa globale Koordinaten). Sie dienen nur als Bezug für die aus den Messungen gewonnenen metrischen Beziehungen, die zu gerichteten Kanten werden. Eine unsicherheitsbehaftete Beziehung wird auf der Kante als Menge von möglichen Relativpositionen (und -orientierungen) des Zielknotens im Koordinatensystem des Startknotens gespeichert. Die Bedeutung hierbei ist, daß man es als zugesichert annimmt, daß die wirkliche Beziehung Element der Menge ist, unter den verschiedenen Elementen aber keine Unterscheidung macht. Kleine Mengen korrespondieren daher zu genauen, große zu ungenauen Beziehungen. Die Verwendung eines mengenorientierten „unknown-but-bounded“ [Sch68] Modells anstelle einer stochastischen Modellierung ermöglicht im folgenden beliebige Verknüpfungen ohne Rücksicht auf stochastische Unabhängigkeit. Die algorithmische Darstellung der Mengen erfolgt über Quadriken und wird später erläutert. Die Kanten unterscheiden sich nach der Anzahl der Freiheitsgrade (DOF), die sie festlegen: Odometrische Messungen bestehen aus der relativen Position ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ) und

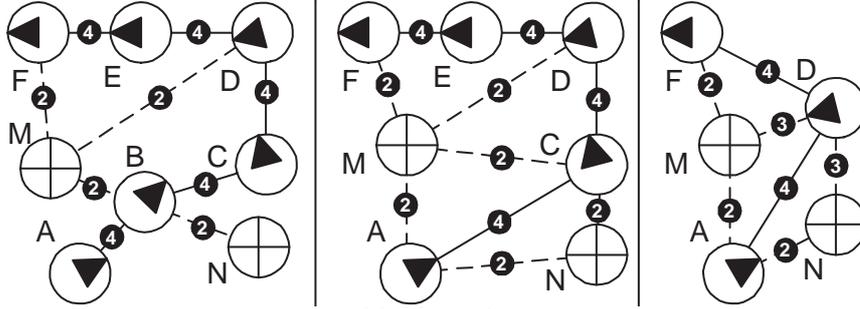


Abbildung 1:

links: Der Roboter fährt von  $A$  nach  $F$  und sieht an Position  $B, D, F$  die Marke  $M$  und an  $B, N$ .  
 mitte: Knoten  $B$  wird eliminiert.  
 rechts:  $C$  und  $E$  werden eliminiert, dabei werden  $\overline{DM}$  und  $\overline{DN}$  durch Schnitt zu 3-DOF Kanten.  
 Eliminierung von  $D$  scheitert z. B. an zu hoher Ungenauigkeit von  $\overline{AD}$  und  $\overline{DF}$ .

der Orientierung in der Ebene ( $\Delta\phi$ ) und bilden somit 4-DOF Kanten. Landmarkensichtungen liefern horizontale und vertikale Winkel relativ zum Roboter und sind daher 2-DOF Kanten. Unser Verfahren kombiniert sie durch Triangulation zu 3-DOF Kanten, die zusätzlich die Entfernung und damit die komplette Relativposition festlegen. Abb. 1 zeigt ein Beispiel für einen so entstehenden Graphen.

## 2.2 Auswertung

Will man den Graphen auswerten, um z. B. die Relativlage zweier Knoten zu bestimmen, muß man die Beziehungen auf den Kanten miteinander verknüpfen. Zwei Kanten zwischen gleichen Knoten, d. h. die auf ihnen liegenden Mengen, lassen sich schneiden, was die Information aus beiden Kanten kombiniert. Außerdem läßt sich eine Kante  $\overline{AB}$  mit einer Kante  $\overline{BC}$  zu einer Kante  $\overline{AC}$  verketteten. Diese ergibt sich als die Menge aller möglichen Relativlagen von  $C$  im System von  $A$ , wenn Beziehung  $\overline{AB}$  für  $B$  in  $A$  und Beziehung  $\overline{BC}$  für  $C$  in  $B$  gilt:

$$\overline{AC} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \phi \end{pmatrix} + \mathbf{D}(\phi) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \psi \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \phi \end{pmatrix} \in \overline{AB} \wedge \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \psi \end{pmatrix} \in \overline{BC} \right\}$$

( $\mathbf{D}(\phi)$  ist hierbei die Drehmatrix um die  $Z$ -Achse und um den Winkel  $\phi$ .)

Zudem kann man Kanten invertieren, d. h. aus einer Beziehung  $B$  in  $A$  eine Beziehung  $A$  in  $B$  bilden. Induktiv fortgesetzt, lassen sich die Kanten jedes Weges im Graphen zu einer Beziehung zwischen Start- und Zielknoten verketteten und für mehrere Wege mit gleichem Start- und Zielknoten danach schneiden (z. B.  $\overline{BCDEF} \cap \overline{BMF}$ , was Odometrie und Relokalisation kombiniert.) Schneidet man die Verkettung aller Wege, die zwei Knoten verbinden, erhält man die schärfste Aussage über deren Relativlage, die sich aus dem Graphen ableiten läßt.

Zwei wichtige Auswertungen werden durch diese Operationen implizit ausgeführt: Verkettet man z. B. in Abb. 1  $\overline{BCDM}$  und schneidet das Ergebnis mit  $\overline{BM}$ , erhält man eine neue Kante  $\overline{BM}$  und damit eine genauere Landmarkenposition. Außer in Ausnahmefällen ergibt sich als Schnitt auch dann eine 3-DOF Kante, wenn  $\overline{BM}$  und  $\overline{DM}$  2-DOF Kanten sind und zwar implizit durch eine

Triangulation über die Strecke  $\overline{BCD}$ . Eine implizite Relokalisation erreicht man durch Verkettung von  $\overline{BM}$  mit  $\overline{MF}$  zu einer zusätzlichen Kante  $\overline{BF}$ , die mit der Verkettung der odometrischen Kanten  $\overline{BCDEF}$  eine verbesserte Roboterposition  $F$  in Bezug auf  $B$  liefert.

Wichtig an dieser Art der Auswertung ist, daß die Berechnung „so relativ wie möglich“ erfolgt: Die Genauigkeit einer Relativlage wird nur durch die Ungenauigkeiten der betrachteten Kanten beeinflusst. Im Gegensatz dazu erhielte man durch Umrechnen in ein globales Koordinatensystem zusätzliche Ungenauigkeiten. Globale Genauigkeit ist in autonom erstellten Karten nicht erreichbar, weshalb dort mit einem „relativen Verfahren“ gearbeitet werden muß.

### 2.3 Vereinfachung

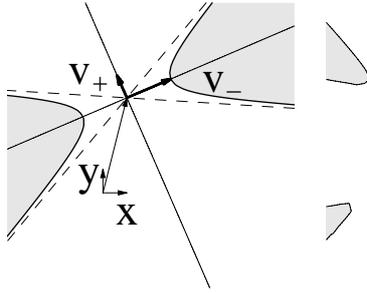
Der Graph enthält bisher für jede Messung eine Kante und für jede frühere Roboterposition einen Knoten und würde auf Dauer viel zu groß. Er muß daher durch Zusammenfassen von Messungen sowie Löschen von nicht mehr benötigten Knoten, besonders ehemaligen Roboterpositionen, vereinfacht werden.

Mehrere Kanten zwischen denselben Knoten können durch ihren Schnitt ersetzt werden. Ein nicht mehr benötigter Knoten läßt sich entfernen, indem man alle Paare von inzidenten Kanten verkettet und die Ergebnisse in den Graphen einträgt. (Bsp.: Durch Entfernen von  $B$  werden aus den Verkettungen  $\overline{ABC}$ ,  $\overline{ABM}$ ,  $\overline{CBM}$ ,  $\overline{ABN}$ ,  $\overline{CBN}$  die Kanten  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AM}$ ,  $\overline{CM}$ ,  $\overline{AN}$ ,  $\overline{CN}$ ). Zwei 2/3-DOF Kanten werden - obwohl prinzipiell möglich - nicht verkettet, weil sonst insgesamt zu viele Kanten entstünden. Der Verzicht auf direkte Kanten zwischen Landmarken erzeugt zusätzliche Ungenauigkeit in der ansonsten äquivalenten Umformung, deren Betrag aber höchstens das Doppelte der geringsten Ungenauigkeit einer inzidenten 4-DOF Kante ist. (Bsp. aus Abb. 1: Die Beziehung  $M$  in  $N$  ergibt sich links als  $\overline{NBM}$  und in der Mitte als  $\overline{NCM} \cap \overline{NAM}$ , was  $\overline{NBCBM} \cap \overline{NBABM}$  (links) entspricht.) Im Gegensatz zu Zustandsschätzern kann hier der Informationsverlust begrenzt werden, indem man nur Knoten an Kanten einer gewissen Mindestgenauigkeit löscht und unter diesen möglichst die genauesten auswählt.

Die Strategie hat wichtige Konsequenzen: Von der dichten Folge ehemaliger Roboterpositionen bleiben nur noch wenige über, die implizit die Aufgabe von Referenzkoordinatensystemen für einen Teil des Graphen übernehmen. Die Kanten zwischen ihnen und den Landmarken drücken aus, bzgl. welchen Koordinatensystems die Marken eingemessen wurden. Solange der Roboter in bekanntem Gebiet fährt, bilden sich durch Verkettung über Marken stets genaue Kanten von neuen Positionsknoten zu alten Referenzsystemen, so daß die neuen gelöscht werden können. Dadurch wächst die Karte nur, wenn der Roboter Neuland betritt (im Unterschied zu [Gut99]).

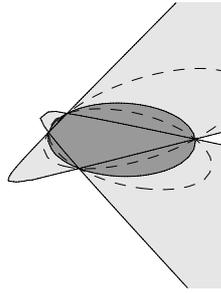
## 3 Modellierung metrischer Beziehungen

Um die im vorigen Abschnitt erläuterten Verfahren zu realisieren, muß eine Repräsentation für „Mengen von Relativposition / -orientierungen“ mit Algo-



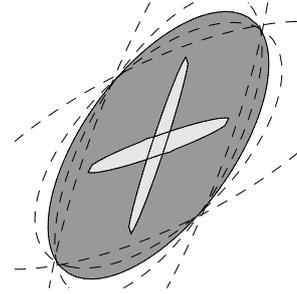
**Abbildung 2:**

Kriterien für Hyperbeln: Öffnungswinkel und Scheitelabstand



**Abbildung 3:**

Schnitt zweier Hyperbeln durch Variation von  $\lambda$  (gestrichelt), optimales  $\lambda$  (dunkel)



**Abbildung 4:**

Minkowski-Summe zweier Ellipsen mit verschiedenen  $\lambda$  (gestrichelt), optimales  $\lambda$  (dunkel)

rithmen für die benötigten Verknüpfungen gefunden werden. Unsere Intention ist, wo möglich die Repräsentation unabhängig vom Graphen im Sinne eines abstrakten Datentyps zu kapseln.

### 3.1 Darstellung

Wir verwenden Quadriken (Bsp. in Abb. 2-4), also quadratische Ungleichungen über Relativposition  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  und -orientierung  $\Delta\phi$  zur Darstellung der 4-DOF Kanten, entsprechend dem „unknown-but-bounded“-Fehlermodell [Sch68]. Es entstehen 4D Ellipsoide, wie sie auch [Han97] verwendet. Die Ungleichungen werden in quadratischer Ergänzung betrachtet, wodurch die Lage des Ellipsoids durch die Ergänzung  $\mathbf{a}$  sowie Form und Größe durch die symmetrische Matrix  $\mathbf{A}$  der quadratischen Terme und den absoluten Term  $\alpha$  bestimmt werden:

$$\left\{ \mathbf{x} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta\phi)^T \mid (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{A} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \alpha \leq 0 \right\}$$

3-DOF Kanten werden analog aus Ungleichungen über  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  gebildet. Eine wesentliche Erweiterung gegenüber [Han97] ist nötig, um auch 2-DOF Kanten repräsentieren zu können. Diese sollen die Menge aller Relativpositionen einer Landmarke beschreiben, die mit ihrer Position im Kamerabild vereinbar sind. Die Menge muß daher in Richtung des Sichtstrahls unendlich ausgedehnt sein, und ihre Ausdehnung quer dazu muß proportional zur Entfernung zunehmen. Wir stellen daher 2-DOF Beziehungen durch Hyperbeln dar. Diese entstehen durch Wahl von  $\mathbf{A}$  als eine Matrix mit einem einzelnen negativen Eigenwert in Richtung des Sichtstrahls (Abb. 2). Das Verhältnis des negativen zu den beiden positiven Eigenwerten bestimmt den Öffnungswinkel und damit die Winkelgenauigkeit, während sich durch  $\alpha > 0$  zusätzlich einbringen läßt, daß die Landmarke mindestens eine gewisse Entfernung hat. Siehe [Bro97] für eine Analyse der Gestalt unterschiedlicher Quadriken. Hanebeck umgeht das Problem, indem er als Menge einen unendlich langen Zylinder mit Eigenwert 0 bildet, dessen Breite sich aus Winkelunsicherheit und der erwarteten Entfernung gemäß Vorschätzung und Karte ergibt [Han97].

Da sich Ungleichungen mit positiven Faktoren multiplizieren lassen, kann man  $\alpha$  auf +1, 0 oder -1 normieren. Im folgenden ist es aber übersichtlicher, den generellen Fall zu behandeln.

### 3.2 Operationen

Es folgt eine mathematische Beschreibung der Durchführung der Operationen. Dabei geben wir nur für die zentralen Argumente Beweise an. Für den Rechenaufwand ist zu beachten, daß alle Matrizen Dimension  $4 \times 4$  oder  $3 \times 3$  haben und daß viele der Rechnungen nur in Sonderfällen nötig sind.

Es ist meist nicht möglich, die Verknüpfung (Schnitt, Verkettung, etc.) zweier Quadriken direkt als Quadrik auszudrücken. Es wird aber stets eine Quadrik berechnet, die die echte Ergebnismenge überdeckt. Das System ist also konservativ. Im folgenden seien  $P$  und  $Q$  zwei zu verknüpfende Quadriken:

$$P := \{\mathbf{x} | p(\mathbf{x}) := (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{A} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \alpha \leq 0\}$$

$$Q := \{\mathbf{x} | q(\mathbf{y}) := (\mathbf{y} - \mathbf{b})^T \mathbf{B} (\mathbf{y} - \mathbf{b}) + \beta \leq 0\}$$

**Transformation:** Affine Transformationen (Koordinatensystemwechsel) ohne Unsicherheit lassen sich durch Substitution von  $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}' + \mathbf{v}$  in der Definitionsgleichung durchführen. Insbesondere kann man zwei Ellipsen oder Ellipse und Hyperbel gleichzeitig so transformieren, daß die Matrizen beider Diagonalgestalt haben. (Ellipse zum Kreis stauchen, dann drehen.)

**Bewertung:** Im weiteren wird es mehrfach notwendig sein, aus einer Menge von Quadriken, die alle die wirkliche Lösungsmenge überdecken, die genaueste auszuwählen. Hierfür eignet sich bei Ellipsen das Volumen  $\sim 1/\sqrt{|\mathbf{A}/\alpha|}$ . Bei Hyperbeln muß man die Eigenwerte  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0 > \lambda_3$  betrachten: Charakteristische Maße sind der Öffnungsflächenwinkel  $\sim \lambda_3/\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$  und das Scheitelabstandsquadrat  $-\alpha\lambda_3^{-1}$ . Da beide unterschiedliche Einheiten (1 bzw.  $m^2$ ) haben, wird als Gütemaß für die Optimierung der Quotient verwendet (Abb. 2).

**Schnitt:** Die gewichtete Summe  $\{\mathbf{x} | (\frac{1}{2} + \lambda) \cdot p(\mathbf{x}) + (\frac{1}{2} - \lambda) \cdot q(\mathbf{x}) \leq 0\}$  ist wieder eine Quadrik und überdeckt  $P \cap Q$ . Je nach  $\lambda$  nimmt das Ergebnis mehr die Form von  $P$  oder  $Q$  an. Daher wird über  $\lambda$  optimiert und das genaueste Ergebnis ausgewählt. Bemerkenswert ist hierbei, daß sich eine Ellipse als Ergebnis ergibt, wenn zwei Hyperbeln einen endlichen Schnitt haben (Abb. 3).

**Minkowski-Summe:** Die Minkowski-Summe  $P + Q = \{x + y | x \in P, y \in Q\}$  wird von folgender Quadrik überdeckt:

$$\{z | (z - (\mathbf{a} + \mathbf{b}))^T (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1} (z - (\mathbf{a} + \mathbf{b})) + (\alpha + \beta) \leq 0\}$$

Falls  $\mathbf{A} + \mathbf{B} \geq 0$  ist, gilt nämlich für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ :

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})^T (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1} (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y}.$$

Dieses beweist man durch Doppeldiagonaltransformation und mittels

$$(x + y)^2 (a^{-1} + b^{-1})^{-1} \leq ax^2 + by^2, \text{ wenn } a + b \geq 0.$$

Vorherige Skalierung der Quadriken mit  $\frac{1}{2} + \lambda$  und  $\frac{1}{2} - \lambda$  liefert eine Menge von Lösungen, aus der man die genaueste als Endergebnis wählt (Abb. 4). Die Minkowski-Summe zweier 2-DOF Quadriken ist 1-DOF und wird daher nicht betrachtet. Bei 2/3-DOF Summen muß  $\lambda$  so gewählt werden, daß das Ergebnis 2-DOF ist (stets möglich).

**Verkettung:** Die Verkettung von  $P$  (nur 4-DOF) und  $Q$  (2/3/4-DOF) geschieht in zwei Schritten: Zuerst verkettet man  $P$  mit  $b$ . Dann dreht man  $(Q - b)$  um den Winkelbereich von  $P$ . Von den Resultaten bildet man die Minkowski-Summe.

**1. Schritt:** Durch Substitution von  $\mathbf{x} := \mathbf{x}' - \mathbf{D}(\phi) \cdot \mathbf{b}$  ergäbe sich die exakte Verkettung von  $P$  mit  $b$ :

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \phi \end{pmatrix} + \mathbf{D}(\phi) \cdot \mathbf{b} \mid \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \phi \end{pmatrix} \in P \right\}$$

Dies ist keine Quadrik. Daher muß  $\mathbf{D}(\phi) \cdot \mathbf{b}$  linear genähert substituiert werden:

$$(b_1, b_2, b_3, b_4) := \mathbf{b}, \quad \mathbf{v}_1 = (0, 0, b_3, b_4)^T, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{D}(\mathbf{a} \cdot \phi)(b_1, b_2, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{D}(\mathbf{a} \cdot \phi)(-b_2, b_1, 0, 0)^T, \quad \mathbf{x} := \mathbf{x}' - \mathbf{v}_1 - \gamma_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \gamma_2 \cdot \mathbf{v}_3 \cdot (\phi - \mathbf{a} \cdot \phi)$$

Um konservativ zu bleiben, wird der Fehler  $\mathbf{r}$  durch die Ellipse

$$\{\mathbf{r} \mid \mathbf{r}^T (\gamma_3 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T + \gamma_4 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3^T) \mathbf{r} - 1 \leq 0\}$$

abgeschätzt und mit einer Minkowski - Addition hinzugefügt. Die  $\gamma_i$  kann man heuristisch als Formel im maximalen Drehwinkel  $\phi_{max}$  angeben.

**2. Schritt:** Es wird eine Quadrik berechnet, die  $(Q - b)$  gedreht um  $-\phi$  bis  $+\phi$  überdeckt (Abb. 5). Man bildet eine Hilfsmatrix  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{X} := \frac{\cos(\gamma)}{\cos(\gamma+\delta)} \cdot \lambda_3 \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}^T, \text{ falls } \lambda_3 < 0, \text{ sonst } \mathbf{X} := 0,$$

$$\mathbf{B}_- = \mathbf{D}(-\phi)^T \mathbf{B} \mathbf{D}(-\phi) \text{ und } \mathbf{B}_+ = \mathbf{D}(\phi)^T \mathbf{B} \mathbf{D}(\phi),$$

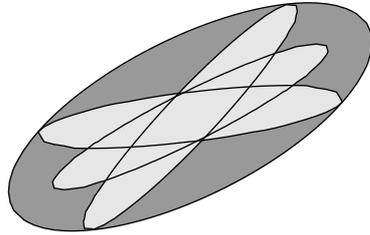
wobei  $\lambda_3$  kleinster Eigenwert von  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{v}$  der dazugehörige Eigenvektor,  $\gamma$  der Öffnungswinkel von  $Q$  und  $\delta$  der Winkel zwischen gedrehtem und ungedrehtem  $\mathbf{v}$  ( $\leq \phi$ ) ist.  $\mathbf{X}$  ist möglichst klein und zwar so gewählt, daß  $\mathbf{B}_- - \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{B} - \mathbf{X}$  und  $\mathbf{B}_+ - \mathbf{X}$  positiv definit sind. Man bringt nun  $\mathbf{B}_- - \mathbf{X}$  und  $\mathbf{B}_+ - \mathbf{X}$  auf gemeinsame Diagonalfom und wählt von den Diagonalwerten jeweils das Minimum. Genauso verfährt man mit dem Ergebnis und  $\mathbf{B} - \mathbf{X}$ . Dann transformiert man zurück und addiert  $\mathbf{X}$ . Nach Konstruktion ist das Ergebnis  $\mathbf{E} \leq \mathbf{B}_-, \mathbf{B}, \mathbf{B}_+$ . Dadurch ist auch  $\mathbf{E} \leq \mathbf{D}_\psi^T \mathbf{B} \mathbf{D}_\psi$  für alle  $-\phi \leq \psi \leq \phi$ , und  $\{\mathbf{x}^T \mathbf{E} \mathbf{x} + \beta \leq 0\}$  überdeckt  $(Q - b)$  in allen betrachteten Drehungen. Ein Beweis hierfür steht noch aus.

**Inversion:** Bei der Inversion von  $P$  (4-DOF) führt die Orientierungsunsicherheit wie bei der Verkettung zu einer unsicheren Drehung. Man dreht daher  $(P - a)$  mathematisch negativ um den Winkelbereich von  $P$  (wie Schritt 2) und verkettet das Ergebnis mit  $-a$  (wie Schritt 1).

Bei den Rechnungen werden vielfach konservative Näherungen vorgenommen. Die Fehler liegen immer in der Größenordnung der schon vorhandenen Fehler. Nicht die Verknüpfung der Größen wird also genähert, sondern nur die Verknüpfung der Fehler der Größen. Kritisch ist die Orientierungsunsicherheit; ab ca.  $\pm 20^\circ$  werden die Fehler erheblich. Dies ist allerdings deshalb unproblematisch, da wegen der lokalen Arbeitsweise des Graphen nicht die globale Orientierungsunsicherheit entscheidend ist, sondern nur die entlang des gerade betrachteten Weges im Graphen.

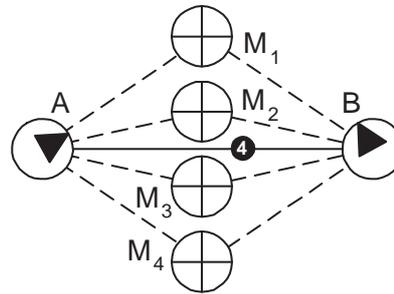
### 3.3 Verkettung von 2/3-DOF Kanten

Probleme macht die in Abb. 6 gezeigte Situation, die auftritt, wenn der Roboter sich durch Sichtung mehrerer Landmarken relokalisieren soll. Vom Knoten  $A$  (ehemalige Roboterposition als Referenzsystem) und  $B$  (neue Roboterposition) gehen 2/3-DOF Kanten zu verschiedenen Landmarken  $M_i$ . Möglicherweise – aber nicht unbedingt – gibt es eine direkte Verbindung  $\overline{AB}$ . Gesucht ist eine bessere Beziehung  $\overline{AB}$ .



**Abbildung 5:**

Rotation einer Ellipse um den Winkelbereich  $[-20^\circ..20^\circ]$



**Abbildung 6:**

Relokalisation aufgrund mehrerer Landmarkensichtungen

Die ideale Vorgehensweise bestünde darin, durch Verkettung jeweils  $\overline{AM_iB}$  zu bilden. Diese Menge besteht aus allen Relativlagen  $B$  in  $A$ , die mit den Beobachtungsdaten der betreffenden Landmarke  $M_i$  verträglich sind. Die neue verbesserte Beziehung  $\overline{AB}$  ergäbe sich dann als Schnitt der  $\overline{AM_iB}$ .

$$\overline{AM_iB} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{D}(\phi) \cdot \mathbf{y} \\ \phi \end{pmatrix} \middle| \mathbf{x} \in \overline{AM_i} \wedge \mathbf{y} \in \overline{BM_i} \wedge \phi \in [0, 2\pi] \right\}$$

Da – anders als bei der Verkettung von 4-DOF Quadriken –  $\phi$  völlig frei ist, entsteht eine Spirale mit X/Y als Drehebene und  $\phi$  als Achse. Eine solche Menge ist natürlich nicht mehr eng mit einer Quadrik zu umschreiben. Allerdings ist es normalerweise so, daß der Schnitt der verschiedenen Spiralen, also die Kombination der Information aus verschiedenen Landmarkensichtungen, wieder so klein ist, daß man ihn eng mit einer Quadrik umschreiben kann. Diese muß bestimmt und als Kante eingetragen werden, weil sonst keine Relokalisation möglich ist. Das Hauptproblem ist die Nichtlinearität der Drehung. Der Abschnitt erläutert die Vorgehensweise, wenn durch eine 4-DOF Kante  $\overline{AB}$  eine hinreichend enge (ca.  $10^\circ$ ) Einschränkung der Orientierung besteht.

Wie bei der Verkettung von 4-DOF Beziehungen läßt sich  $\overline{AM_iB}$  für den aufgrund der direkten Kante  $\overline{AB}$  relevanten Winkelbereich als 4-DOF Quadrik überdecken, wenn  $\overline{AM_i}$  und  $\overline{BM_i}$  3-DOF Kanten sind. Sobald eine der Kanten 2-DOF ist, läßt sich nur eine Verkettung als 2-DOF Kante, d. h. die Projektion von  $\overline{AM_iB}$  in den Positionsraum bilden. Zwei 2-DOF Kanten lassen sich nicht sinnvoll verketteten. Alle gewonnenen  $\overline{AB}$  Beziehungen werden geschnitten. Die 4-DOF Verkettungen sind viel wertvoller, weil ihre Schnitte Positionen/Orientierungen liefern, die gleichzeitig mit allen Landmarkensichtungen verträglich sind. Der Schnitt von 2/3-DOF Verkettungen liefert nur eine Menge von Positionen, an denen es für jede Landmarke verträgliche Orientierungen gibt. Durch die genauere Kante  $\overline{AB}$  kann sich der Bereich der zulässigen Winkel einschränken, womit die Verkettungen erneut genauer gebildet werden können. Weiterhin wird mit der neu gewonnenen  $\overline{AB}$  Kante  $\overline{ABM_i}$  bzw.  $\overline{BAM_i}$  gebildet und mit  $\overline{AM_i}$  bzw.  $\overline{BM_i}$  geschnitten, wodurch Kanten genauer oder 2-DOF Kanten zu 3-DOF Kanten werden. Entsteht eine leere Menge, ist der Graph widersprüchlich. Nur an

dieser Stelle beeinflussen Landmarken mit zwei 2-DOF Kanten die Rechnung. Diese sind normalerweise weit entfernt, weil sie sonst schon zu 3-DOF trianguliert worden wären, so daß man aus ihnen nur Information über die Orientierung gewinnen kann. Der oben beschriebene Prozeß wird iteriert, bis keine hinreichende Verbesserung mehr eintritt.

### 3.4 2/3-DOF Verkettung ohne Winkeleinschränkung

Existiert keine 4-DOF Kante  $\overline{AB}$ , oder ist deren Orientierungsunsicherheit zu groß, liefert das Verfahren aus dem vorangehenden Abschnitt keine sinnvollen Ergebnisse mehr, weil die Näherung der einzelnen Verkettungen zu ungenau wird. Die Lösung in diesem Fall ist, das Verfahren mit einer zusätzlichen Einschränkung der Orientierung  $[\phi_{min}.. \phi_{max}]$  aufzurufen. Da die Einschränkung keine hergeleitete Folgerung aus den Beziehungen des Graphen, sondern eine willkürliche „was wäre, wenn“ Annahme ist, dürfen im Zuge der Rechnung keine Kanten verändert werden. Die am Ende entstehende  $\overline{AB}$  Beziehung muß vielmehr so interpretiert werden, daß wenn die Orientierung zwischen  $\phi_{min}$  und  $\phi_{max}$  liegt, dann Position und Orientierung die Beziehung erfüllen.

Wir definieren  $Q(\phi_{min}.. \phi_{max})$  als die Beziehung  $\overline{AB}$ , die das obige Verfahren liefert, wenn man  $[\phi_{min}.. \phi_{max}]$  als zusätzliche Einschränkung für die Orientierung von  $\overline{AB}$  setzt.  $\psi_{min}(\phi_{min}.. \phi_{max})$  bzw.  $\psi_{max}(\phi_{min}.. \phi_{max})$  definieren wir als den minimalen bzw. maximalen Winkel aus  $Q(\phi_{min}.. \phi_{max})$ .

Es kann sein, daß  $\psi_{min}(\phi_{min}.. \phi_{max}) > \phi_{min}$  oder  $\psi_{max}(\phi_{min}.. \phi_{max}) < \phi_{max}$  ist. Dann ist der Rest, nämlich  $[\phi_{min}.. \psi_{min}]$  bzw.  $[\psi_{max}.. \phi_{max}]$ , nicht mit den Messungen verträglich und kann aus der folgenden Betrachtung ausgeschieden werden. Die Strategie ist daher, aus dem Vollkreis sukzessive möglichst große Intervalle auszuscheiden, bis der Rest den Winkelbereich der exakten Lösung eng genug umschließt. Das Endergebnis ist  $Q$  von diesem Winkelbereich.

Dazu muß als erstes der Winkelbereich der exakten Lösung in einem Intervall eingeschlossen werden. Existiert eine direkte Kante  $\overline{AB}$ , kann deren Winkelbereich verwendet werden. Ansonsten teilt man den Vollkreis sukzessive in immer kleiner werdende Teile und überprüft diese mittels  $Q$ . Sobald sich ein Intervall  $[\alpha.. \beta]$  von nicht verträglichen Winkeln ergibt, wird dessen Komplement als vorläufiges Einschlußintervall  $[\phi_{min}.. \phi_{max}] := [\beta.. \alpha + 2\pi]$  gesetzt.

Nun verkleinert man durch Testen von Abschnitten der Länge  $d$  das Einschlußintervall von den Enden her weiter.

$$\begin{aligned}\phi_{min} &:= \max(\phi_{min}, \psi_{min}(\phi_{min}.. \phi_{min} + d)) \\ \phi_{max} &:= \min(\phi_{max}, \psi_{max}(\phi_{max} - d.. \phi_{max}))\end{aligned}$$

Man startet mit  $d := (\phi_{max} - \phi_{min})/2$ . Ergibt sich keine Verbesserung, wird  $d$  bis zu einer Abbruchsgrenze halbiert; dann wird  $Q(\phi_{min}.. \phi_{max})$  auf der Kante  $\overline{AB}$  als Endresultat eingefügt.

Der Näherungsfehler bei der Berechnung von  $Q(\phi_{min}.. \phi_{max})$  verschwindet bei gegen 0 strebendem Winkelbereich  $\phi_{max} - \phi_{min}$ . Ist daher kein Winkel eines bestimmten Bereiches verträglich, stellt man dies durch Berechnen von  $Q$  auf hinreichend kleinen Teilbereichen auch fest. Es konvergiert daher  $[\phi_{min}.. \phi_{max}]$  gegen den Winkelbereich der exakten Lösung. Ist dieser klein, umschließt das

Endergebnis die exakte Lösung eng. Ist er allerdings groß, kann der resultierende Fehler deutlich größer sein als aufgrund der Datenbasis nötig.

Die beschriebenen Rechnungen sind sicherlich aufwendig. Allerdings existiert oft eine Winkeleinschränkung durch eine Kante  $\overline{AB}$  aus der Odometrie. Außerdem verkleinert sich das Einschlußintervall in den meisten Fällen schnell.

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben eine Datenstruktur und dazugehörige Auswertungsalgorithmen vorgestellt, die Relokalisation und automatische Kartierung auf der Basis von visuellen Landmarken unterstützt sowie großräumige Konsistenz und das Schließen von Kreisen zuläßt. Die Struktur basiert auf einem Graph von metrischen Relativbeziehungen, die mengenbasiert modelliert werden. Dabei wird neben der Meßungenauigkeit auch die Unkenntnis der Entfernung beim einmaligen Sichten einer Landmarke korrekt abgebildet. Hierzu wurde das ellipsenbasierte „unknown-but-bounded“ Modell aus [Han97,Sch68] zumindest teilweise um Hyperbeln erweitert. Die mengenbasierte Vorgehensweise ermöglicht, Beziehungen ohne Rücksicht auf stochastische Unabhängigkeit zu verknüpfen, was die Basis sowohl von Auswertung als auch Vereinfachung der Datenstruktur ist. Die automatische Vereinfachung gewährleistet insbesondere, daß anders als bei [Gut99,Lu97] beliebig langes Kartieren der selben Umgebung nicht zu immer größeren Modellen führt.

Das vorgestellte Verfahren wird z. Zt. implementiert und experimentell überprüft. Ein großes Problem ist die Sensitivität gegen Meßausreißer und v. a. gegen Fehlklassifikationen der Landmarken. Hier sind noch Forschungen nötig; eine weitere Frage ist die Vereinfachung der recht komplizierten Verknüpfungen. Benötigt wird außerdem ein Bildverarbeitungsmodul, das Landmarken nicht nur erkennen, sondern auch automatisch auswählen kann.

## Literatur

- [Bro97] I. Bronstein, K. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig. Taschenbuch der Mathematik, 1997.
- [Gut99] J.-S. Gutmann and K. Konolige. Incremental mapping of large cyclic environments, International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation (CIRA'99), Monterey, November 1999. To appear.
- [Han97] U. Hanebeck. Lokalisierung eines mobilen Roboters mittels effizienter Auswertung von Sensordaten und mengenbasierter Zustandsschtzung, Dissertation, Technische Universitt Mnchen, 1997, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr.643.
- [Lu97] Feng Lu and E. E. Milios. Globally consistent range scan alignment for environment mapping, Autonomous Robots, Volume 4, 1997, pp.333-349.
- [Sch68] F. C. Schweppe. Recursive state estimation: Unknown but bounded errors and system inputs, IEEE Transactions on Automatic Control, Bd 13 (1968), S.22-28.
- [Thr96] S. Thrun, A. Bücken. Integrating grid-based and topological maps for mobile robot navigation, In Proc. Of the Thirteenth National Conference on Artificial Intelligence, Menlo Park, Aug.1996, AAAI Press/MIT Press.
- [Wei94] G. Wei, C. Wetzler, E. v. Puttkamer. Keeping track of position and orientation of moving indoor systems by correlation of ranger-finder scans, Intelligent Robots and Systems, Munich, Germany, Sep.1994.
- [Yag95] Y. Yagi, Y. Nishizawa, M. Yachida. Map-based navigation for a mobile robot with omnidirectional image sensor COPIS, IEEE Trans. On Robotics and Automation, Bd.11, 1995, Heft 5, S.634-648.