Dr. Rüdiger Ebendt
ebendt@tzi.de
MZH 3530

1. Übungsblatt zur Vorlesung

Optimierung von graphenbasierten Funktionsdarstellungen

Aufgabe 1
Wir betrachten die folgenden Mengen ($n, m \in \mathbb{N}_0$):

$$\begin{aligned} B_n = & \quad \{f | f : B^n \to B\} \\ B_{n,m} = & \quad \{f | f : B^n \to B^m\} \end{aligned}$$

Berechne die Kardinalität dieser Mengen, d.h. ermittle:
a) $|B_n|$
b) $|B_{n,m}|$

Aufgabe 2
Warum sind folgende Darstellungen für Boolesche Funktionen Normalformen, d.h. bis auf Umbenennung/Umsortierung der Variablen eindeutige Darstellungen?
a) Wahrheitstabelle
b) vollständiger binärer Entscheidungsbaum
c) DNF
d) CNF

Aufgabe 3
Gib eine Herleitung der in der Vorlesung gegebenen Ringsummendarstellung

$$x_1 \cdot x_3 \oplus +x_2 \cdot x_3 \oplus x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

aus der als CNF gegebenen Funktion

$$f: \; (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + x_2 + x_3') \cdot (x_1 + x_2' + x_3) \cdot (x_1' + x_2 + x_3) \cdot (x_1' + x_2' + x_3)$$

an. Verwende dabei die aus der technischen Informatik 1 für Boolesche Algebren bekannten Gesetzmäßigkeiten (u.a. die de Morgan'schen Regeln).

Aufgabe 4
a) Zeige, dass es für jede Boolesche Funktion $f \in \mathcal{B}_n$ eine *Ringsummendarstellung* (RSE) gibt, die keine negativen Literale enthält. D.h., beweise folgende Aussage:
Jede Funktion $f \in \mathcal{B}_n$ lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$f = \oplus_{i=1}^{m} x_{i_1} \dots x_{i_{l_i}}$$

mit

- $\forall 1 \leq i \leq k \left((x_{i_j} \in \{x_1 \dots x_n\} \vee (l_i = 1 \wedge x_{i_1} = 1)) \wedge \forall p \neq q (x_{i_p} \neq x_{i_q})\right)$,
  d.h. ein Monom ist entweder die Konstante 1 oder besteht vollständig aus positiven Literalen und kein Literal kommt zweimal in einem Monom vor,
- $x_{i_1} \dots x_{i_{l_i}} \neq x_{j_1} \dots x_{j_{l_j}}$ für $i \neq j$,
  d.h. jedes Monom darf maximal einmal auftreten.

Hinweis: Gehe bei Deinen Überlegungen von der CNF zu f aus und verfahre wie unter Aufgabe 3.

b) Zeige oder widerlege:
Die in obiger Gleichung angegebene Darstellung ist für jedes $f \in \mathcal{B}_n$ eindeutig. Hinweis: Überlege Dir, wieviel verschiedene RSEs es für n-stellige Boolesche Funktionen überhaupt geben kann. Welchen Schluss läßt nun Ergebnis b) aus Aufgabe 1 zu?