Universität Bremen – Fachbereich 3
Mathematik & Informatik

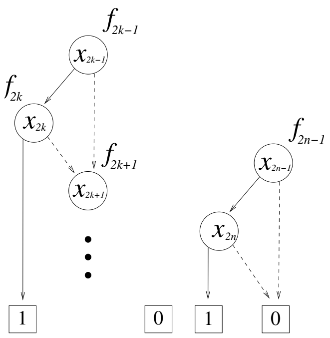
Dr. Rüdiger Ebendt
ebendt@tzi.de
MZH 3530

11. Übungsblatt zur Vorlesung

Optimierung von graphenbasierten Funktionsdarstellungen

Aufgabe 1

Sei $f\colon\ \mathbf{B}^{2\cdot n} \to \mathbf{B}$; $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) \mapsto x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4 + \ldots + x_{2\cdot n-1} \cdot x_{2\cdot n}$.



(a) BDD für $f_{2\cdot k-1}$.

(b) BDD für $f_{2\cdot n-1}$.

Abbildung 1: Sub-BDDs des BDDs für $f = x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4 + \ldots + x_{2n-1} \cdot x_{2n}$.

Die Funktion f kann man auch als letztes Element f_1 einer Folge $f_{2\cdot n-1}, f_{2\cdot n-3}, \ldots, f_1$ von rekursiv definierten Funktionen $f_i\colon\ \mathbf{B}^{2\cdot n} \to \mathbf{B}$ auffassen. Dabei sind die f_i wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} f_{2\cdot n-1} &= x_{2\cdot n-1} \cdot x_{2\cdot n}, \text{ und, für } 1 \leq k < n, \\ f_{2\cdot k-1} &= x_{2\cdot k-1} \cdot x_{2\cdot k} + f_{2\cdot k+1} \end{aligned}$$

a) Zeige nun, dass

$$f_{2\cdot k-1} = x_{2\cdot k-1} \cdot f_{2\cdot k} + \overline{x}_{2\cdot k-1} \cdot f_{2\cdot k+1}$$

gilt, wobei $f_{2\cdot k} := x_{2\cdot k} + \overline{x}_{2\cdot k} \cdot f_{2\cdot k+1}$.

b) Sei ϵ_i der ϵ-Wert (also die erwartete Pfadlänge) des (Sub-)BDDs, das f_i repräsentiert (siehe auch Abbildungen 1(a) und 1(b) für darstellende BDDs). Zeige nun, dass

$$\begin{aligned} \epsilon_{2\cdot n-1} &= \frac{3}{2}, \\ \epsilon_{2\cdot k-1} &= \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \cdot \epsilon_{2\cdot k+1} \text{ für } 1 \leq k < n \end{aligned}$$

gilt.

c) Entwickle nun diese rekursive Definition zu der geschlossenen Form, wie sie in der Vorlesung angegeben wurde, d.h. zeige

$$\epsilon_1 = 6 - \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \left[= 6 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n}\right)\right].$$