Dr. Rüdiger Ebendt
ebendt@tzi.de
MZH 3530

7. Übungsblatt zur Vorlesung

Optimierung von graphenbasierten Funktionsdarstellungen

Aufgabe 1

a) In der Vorlesung wurde besprochen, wie n-stellige symmetrische Boolesche Funktionen eindeutig mit einem $(n+1)$-stelligen Wertevektor identifiziert werden können.
Gib bitte die entsprechenden Vektoren für
   - $f\colon\ \mathbf{B}^3 \to \mathbf{B}; (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$
   - $g\colon\ \mathbf{B}^4 \to \mathbf{B}; (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
   - $h\colon\ \mathbf{B}^3 \to \mathbf{B}; (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3$

   an.

b) Wieviele verschiedene symmetrische Boolesche Funktionen in n Variablen gibt es? Begründe Deine Antwort.

c) Angenommen, eine Boolesche Funktion wird zufällig aus der Menge aller Boolescher Funktionen ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Funktion symmetrisch ist? Wie verhält sich diese Wahrscheinlichkeit, wenn die Anzahl der Eingabevariablen n gegen Unendlich geht?

d) Diskutiere kurz die Relevanz Deines Ergebnisses für c) für die Praxis.

Aufgabe 2

Beispiele für praktisch relevante symmetrische Funktionen sind u.a.

- die Paritätsfunktionen „Odd-Parity“ / „Even-Parity“ aus der Vorlesung
- Schwellwertfunktionen $T_k^n\colon \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}, 0 \le k \le n; (x_1, \ldots, x_n) \mapsto 1$ genau dann, wenn $(\sum_{i=1}^{n} x_i) \ge k$, wie z.b. „at-least-three“ aus der Vorlesung
- Die Majoritätsfunktion $M_k^n\colon \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}, 0 \le k \le n; (x_1, \ldots, x_n) \mapsto 1$ genau dann, wenn $(\sum_{i=1}^{n} x_i) \ge \frac{n}{2}$

a) Diskutiere nun, wie die Anzahl der Knoten für einen darstellenden BDD (beliebiger Variablenordnung) mit n wächst, d.h. gib die Größenordnung dieses Wachstums möglichst genau mit der Landauschen Notation an. Begründe Deine Ergebnisse informell, z.B. durch Angabe eines schematischen, darstellenden BDDs.

b) Diskutiere Anwendungsfelder der Informatik, in denen diese symmetrischen Funktionen eine Rolle spielen können.

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass es eine Variablenordnung gibt, unter der das BDD für die Boolesche Funktion

$$f\colon\ \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}; (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4 + \ldots x_{n-1} \cdot x_n$$

eine exponentielle Größe besitzt. Zeige nun unter Zuhilfenahme des in der Vorlesung besprochenen Struktursatzes für BDDs, dass die Variablenordnung $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ zu einer linearen BDD-Größe für f führt.