Universität Bremen – Fachbereich 3
Mathematik & Informatik

Dr. Rüdiger Ebendt
ebendt@tzi.de
MZH 3530

8. Übungsblatt zur Vorlesung

Optimierung von graphenbasierten Funktionsdarstellungen

Aufgabe 1

In der Herleitung der kleinsten oberen Schranke für die BDD-Größe einer beliebigen n-stelligen Booleschen Funktion nach Liaw und Lin wurde in der Vorlesung die Ableitung $B'(x) = \frac{\mathrm{d}\ B(x)}{\mathrm{d}x}$ für

$$B\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}; (x) \mapsto \frac{1}{2^x} + \frac{2^{2^x}}{2^n}$$

verwendet. Berechne nun $B'(x)$ unter Verwendung wohlbekannter Beziehungen wie etwa $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$, $(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}\ \ln(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$ und $(\lambda x. \frac{1}{x})' = \lambda x. \frac{-1}{x^2}$ sowie der folgenden Regeln für die Differentiation, wie sie schon aus der Schule bekannt sind:

Satz 1 (Kettenregel). *Seien $f\colon\ D \to \mathbb{R}$ und $g\colon\ E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$. Die Funktion f sei im Punkt $x \in D$ differenzierbar und g sei in $y := f(x) \in E$ differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Funktion*

$$g \circ f\colon\ D \to \mathbb{R}$$

im Punkt x differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Satz 2 (Ableitung der Umkehrfunktion). *Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $f\colon\ D \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion und $\varphi = f^{-1}\colon\ D^* \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion, wobei $D^* = f(D)$.*

Ist f im Punkt $x \in D$ differenzierbar und $f'(x) \neq 0$, so ist φ im Punkt $y := f(x)$ differenzierbar und es gilt

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\varphi(y))}.$$

Kontrollrechnung: Setze $B'(x) = 0$ und vereinfache die Gleichung, bis sich (hoffentlich;-) die Gleichung

$$2 \cdot x + 2^x + \log_2(\ln 2) = n$$

ergibt, die Ausgangspunkt unserer Analyse in der Vorlesung war.

Aufgabe 2

Sei $n = 2^k$ und $\vec{a} = a_0, \ldots, a_{k-1}$. Sei BINDEX$\colon\ \mathbf{B}^{n+k} \to \mathbf{B}$; $(a_0, \ldots, a_{k-1}, x_0, \ldots, x_{n-1}) \mapsto x_{\langle \vec{a} \rangle}$, wobei $\langle \vec{a} \rangle$ die Binärzahl bezeichnet, die durch $\vec{a}$ dargestellt wird. Sei F ein BINDEX darstellendes BDD, das einer Variablenordnung genügt, deren l erste Positionen aus l $(1 \le l \le n)$ der Variablen x_i $(0 \le i \le n-1)$ besteht. Zeige mit Hilfe des Struktursatzes und den in der Vorlesung besprochenen Techniken, dass F mindestens $2^l - 2$ verschiedene innere Knoten besitzt.

Aufgabe 3

a) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $x \ge -1$, $i \in \mathbb{N}$. Zeige durch vollständige Induktion, dass die *Bernoulli-Ungleichung*

$$(1+x)^i \ge 1 + i \cdot x$$

gilt.

b) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $0 \le x \le 1$, $i \in \mathbb{N}$. Zeige durch vollständige Induktion, dass dann auch

$$(1-x)^i \ge 1 - i \cdot x$$

gilt.