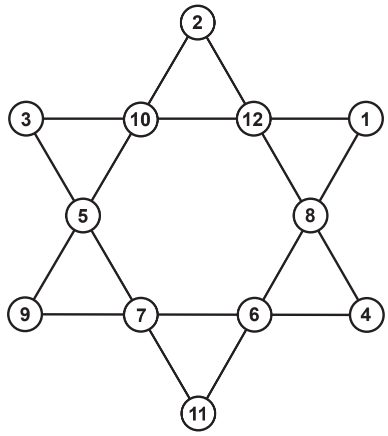
Prof. Dr. Rolf Drechsler, drechsler@informatik.uni-bremen.de, MZH 3510
Dr. Nicole Drechsler nd@informatik.uni-bremen.de, MZH 3550

5. Übungsblatt zur Vorlesung

Technische Informatik 1

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Dies ist ein *Magischer Stern*.



a) Beschreibe den Stern formal als einen Graphen $G = (V, E)$, wobei V die Menge der Knoten und E die Menge der Kanten bezeichnet.
b) Nenne zwei Pfade von Knoten 5 nach Knoten 1 im Graphen G.
Dabei ist ein *Pfad* von v_0 nach v_l eine Folge $v_0, v_1, \ldots, v_l$ von (nicht notwendig verschiedenen) Knoten $v_i \in V$, $0 \leq i \leq l$, so dass für $i = 0, \ldots, l-1$ gilt: $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$.
Wie viele Pfade von Knoten 5 nach Knoten 1 gibt es?

Zusatzaufgabe:
Welche Eigenschaften besitzt der *Magische Stern*? Finde weitere Lösungen!

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Die Topologie eines Multicomputers sei wie folgt gegeben:
Die Verbindungsstruktur ist auf der Basis eines 1-dimensionalen Arrays P definiert. Das Array P besitzt $n-1$ Elemente $(P[1] \ldots P[n-1])$, wobei $n = 2^k$ gilt. Die Arrayelemente $P[i]$ stellen dabei die Prozessorknoten dar. Die Verbindungen zwischen den Prozessorknoten sind gegeben durch folgende Bedingung:

Zwischen $P[i]$ und $P[j]$ $(1 \leq i < j < n)$ existiert genau dann eine Verbindung, wenn

- $i < n/2$ und
- $j = 2 \cdot i$ oder
  $j = 2 \cdot i + 1$ gelten.

Bestimme für diese Verbindungsstruktur
a) die Anzahl der Kanten,
b) den Grad,
c) und den Durchmesser.

Hinweis:
Transformiere die Verbindungsstruktur in einen Graphen $G = (V, E)$ für $n = 8, 16, \ldots$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)
In der Vorlesung wurden der Durchmesser, der Grad und die Anzahl der Verbindungen als Charakteristika eines Netzwerkes von Rechnern vorgestellt. Zwei weitere Maße sind die Knotenkonnektivität und die Kantenkonnektivität. Sie sind wie folgt definiert:

Definition: *Knotenkonnektivität* $nc(G)$
Für eine beliebige Teilmenge $M \subseteq V$ bezeichne $G_{V \setminus M}$ den Restgraphen, der durch Löschen der Knoten in M, sowie der zugehörigen Kanten entsteht, d.h.

$$G_{V \setminus M} = (\ V \setminus M,\ E \cap ((V \setminus M) \times (V \setminus M))\ )$$

Dann ist die *Knotenkonnektivität* des Graphen G:

$$nc(G) := \min_{M \subseteq V} \{|M| : \text{Es gibt } i, j \in V \setminus M, \text{ so dass es in } G_{V \setminus M} \text{ keinen Pfad von } i \text{ nach } j \text{ gibt}\}$$

Definition: *Kantenkonnektivität* $ec(G)$
Für eine beliebige Teilmenge $F \subseteq E$ bezeichne $G_{E \setminus F}$ den Restgraphen, der durch Löschen der Kanten in F entsteht, d.h.

$$G_{E \setminus F} = (\ V,\ E \setminus F\ )$$

Dann ist die *Kantenkonnektivität* des Graphen G:

$$ec(G) := \min_{F \subseteq E} \{|F| : \text{Es gibt } i, j \in V, \text{ so dass es in } G_{E \setminus F} \text{ keinen Pfad von } i \text{ nach } j \text{ gibt}\}$$

a) Gib eine inhaltliche Interpretation der beiden Maße in Bezug auf die Ausfallsicherheit eines Netzwerkes an.
b) Bestimme die Knotenkonnektivität und die Kantenkonnektivität:
  - nc_S^k / ec_S^k eines Meshs (Torusähnliches Gitter) mit $k \times k$ Knoten,
  - nc_R^k / ec_R^k eines Rings aus k Knoten,
  - nc_H^k / ec_H^k eines k-dimensionalen Hypercubes.

c) Welches Problem tritt auf, wenn man die Knotenkonnektivität eines vollständigen Verbindungsgraphen bestimmen will? (Hinweis: Überlege Dir die Antwort im Zusammenhang mit der inhaltlichen Bedeutung der Knotenkonnektivität).

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Zur Informationsübertragung in Multicomputern stehen für jeden Prozessor verschiedene Übertragungsarten zur Verfügung. Dazu gehören

- die Übertragung einer Nachricht an einen bestimmten anderen Prozessor (*point-to-point*).
- die Übertragung einer Nachricht an **alle** anderen Prozessoren (*broadcast*).

Betrachte nun einen Multicomputer mit n Prozessoren. Berechne je eine obere (*worst case*) und eine untere Schranke (*best case*) für die benötigte Zeit

1. einer *point-to-point* Übertragung
2. einem *broadcast*

bei folgenden Verbindungsstrukturen:
a) Mesh
b) k-dimensionaler Hypercube (hier sei $n = 2^k$)
Dabei wird angenommen, dass die Übertragung über eine Kante einen Zeitschritt benötigt. Ein Knoten kann gleichzeitig an alle seine benachbarten Knoten senden und es dürfen mehrere Knoten gleichzeitig senden. Alle Schranken sollen in Abhängigkeit von n angegeben werden (nicht in Abhängigkeit von k). Begründe die Antworten.

Abgabetermin: zu Beginn der Vorlesung am 29.05.2008