Universität Bremen – Fachbereich 3
Mathematik & Informatik

Prof. Dr. Rolf Drechsler, drechsler@informatik.uni-bremen.de, MZH 3510
Dr. Nicole Drechsler nd@informatik.uni-bremen.de, MZH 3550

8. Übungsblatt zur Vorlesung

Technische Informatik 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{B} = (M, \cdot, +, \bar{\cdot})$ eine Boolesche Algebra. Beweise die beiden folgenden Sätze durch Anwendung der in der Vorlesung vorgestellten Axiome (Kommutativität, Assoziativität, Distributivität, Absorption, Auslöschung):

a) **Satz 1:** Jede Boolesche Algebra $\mathcal{B}$ besitzt genau ein *Nullelement* und genau ein *Einselement*, d.h. Elemente mit den Eigenschaften:

  i) $a + 0 = a$ und $a \cdot 0 = 0$

  ii) $a \cdot 1 = a$ und $a + 1 = 1$,

  für alle $a \in M$.

b) **Satz 2:** In einer Booleschen Algebra gibt es zu jedem $a \in M$ genau ein *inverses* Element b mit

  i) $a + b = 1$

  ii) $a \cdot b = 0$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

a) $f_d(x_1, \ldots, x_n) := \overline{f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}$ heißt *duale* Funktion zu f. Zeige: $(f_d)_d = f$, für $f \in B_n$

b) Bildet das Tupel $(V, \bullet, +, \tilde{\ })$ mit

$$
\begin{array}{lll}
V = \{1, 2, 3, 6\} & & \\
x \bullet y & = & kgV(x, y) \text{ mit } x, y \in V \qquad (\textit{kleinstes gemeinsames Vielfaches}) \\
x + \mathbf{y} & = & ggT(x, y), \text{ mit } x, y \in V \qquad (\textit{größter gemeinsamer Teiler}) \\
\tilde{x} & = & \frac{6}{x}, \text{ mit } x \in V
\end{array}
$$

eine Boolesche Algebra?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) Bestimme für die folgende Funktion die Menge der Primimplikanten mit dem Verfahren von Quine-McCluskey:

$$
f \in \mathcal{B}_5 \text{ mit } \mathtt{ON}(f)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \{ \begin{array}{l} (00011), (01011), (01111), (01010), (01101), \\ (00101), (10001), (10011), (00110), (11011), \\ (00111), (00001), (01001)\} \end{array}
$$

b) Stelle für die in Teil a) berechneten Primimplikanten eine Primimplikantentafel auf und bestimme durch Anwenden der Reduktionsregeln ein Minimalpolynom für f.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

a) Zeige, dass es für jede Boolesche Funktion $f \in B_n$ eine *Ringsummendarstellung* gibt, die keine negativen Literale enthält. D.h., beweise folgende Aussage:
Jede Funktion $f \in B_n$ lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$f = \oplus_{i=1}^{m} x_{i_1} \dots x_{i_{l_i}}$$

mit

- $\forall 1 \leq i \leq m, \forall 1 \leq j \leq l_i \left((x_{i_j} \in \{x_1 \dots x_n\} \vee (l_i = 1 \wedge x_{i_1} = 1)) \wedge \forall p \neq q (x_{i_p} \neq x_{i_q})\right)$,
d.h. ein Monom ist entweder die Konstante 1 oder besteht vollständig aus positiven Literalen und kein Literal kommt zweimal in einem Monom vor,
- $x_{i_1} \dots x_{i_{l_i}} \neq x_{j_1} \dots x_{j_{l_j}}$ für $i \neq j$,
d.h. jedes Monom darf maximal einmal auftreten.

b) Zeige oder widerlege:
Die in obiger Gleichung angegebene Darstellung ist für jedes $f \in B_n$ eindeutig.

Bemerkung:
Die Ringsummendarstellung ist auch bekannt unter den Namen *Positiv Polarity Reed Muller*-Darstellung, die nach den amerikanischen Mathematikern Reed und Muller benannt ist. Zuvor in den 30er Jahren des 20. Jahrhunderts wurde diese kanonische Darstellung von dem russischen Mathematiker Zhegalkin beschrieben und entsprechend *Zhegalkin Polynom* genannt.

Zusatzaufgabe (Lösung bitte auf einem extra Blatt abgeben) (10 Punkte)
Die Ringsummendarstellung wird „Positive Polarity Reed Muller"-Darstellung (PPRM) genannt, weil zu jeder Variable x nur das *positive* Literal x, nicht aber das negative Literal $\overline{x}$ in der Darstellung einer Funktion vorkommt. Eine Erweiterung stellt die „Fixed Polarity Read Muller"-Darstellung (FPRM) dar. Hierbei wird gewählt, ob zu jeder Variable x *nur* das positive Literal x oder *nur* das negative Literal $\overline{x}$ verwendet wird, aber nicht beide.

a) Gib analog zur Definition eines Ausdrucks in PPRM-Darstellung in Aufgabe 4 a) eine Definition der FPRM-Darstellung an.

b) Gib einen Algorithmus zur Konvertierung eines FPRM-Ausdrucks in einen äquivalenten PPRM-Ausdruck an. Begründe dabei die Äquivalenz der Ein- und Ausgabe des Algorithmus.

c) Die Größe einer FPRM-Darstellung wird in der Anzahl der Monome gemessen (in der vorigen Aufgabe m). Die Wahl der Polarität beeinflusst die Größe sehr stark (vgl. die Funktion $f = \overline{x}_1 \dots \overline{x}_n$ in PPRM-Darstellung). Gib einen Algorithmus zur optimalen Wahl der Polaritäten für eine beliebige Boolesche Funktion an.

d) Beschränkt man sich auf symmetrische Boolesche Funktionen lässt sich die optimale Wahl in polynomial vielen Schritten (in Abhängigkeit von n) treffen. Gib einen Algorithmus an.

Definition: Eine Boolesche Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ heißt genau dann *symmetrisch*, wenn der Funktionswert durch einen Vektor $w = (w_0, \dots, w_n), w_i \in \{0, 1\}$ angegeben werden kann, wobei

$$w_i = 1$$

gdw.

$$f(a_1, \dots, a_n) = 1 \text{ und } |\{a_j, j = 1 \dots n : a_j = 1\}| = i$$

Anschaulich: Der Funktionswert einer symmetrischen Funktion ist nur von der Anzahl der Einsen im Argument, nicht aber von deren Position abhängig.

Abgabetermin: zu Beginn der Vorlesung am 19.06.2008