



Prof. Dr. Rolf Drechsler, drechsler@informatik.uni-bremen.de, MZH 3510
Dr. Nicole Drechsler nd@informatik.uni-bremen.de, MZH 3485

8. Übungsblatt zur Vorlesung

Technische Informatik 1

Aufgabe 1

(3 Punkte)

Sei $\mathcal{B} = (M, \cdot, +, \bar{})$ eine Boolesche Algebra. Zeige durch ausschließliche Anwendung der Axiome (Kommutativität, Assoziativität, Distributivität, Absorption und Auslöschung), dass für \mathcal{B} folgende Gesetze gelten:

- $\exists_1 \mathbf{0} \in M : \forall m \in M : m \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \text{ und } m + \mathbf{0} = m$
- $\forall m \in M : m + m = m$
- $\forall m \in M : \overline{\overline{m}} = m$

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Sei V eine endliche Menge. Zeige, dass das Tupel $(\mathcal{P}(V), \cap, \cup, {}^C)$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(V) &= \{V' \mid V' \subseteq V\} && \text{(Potenzmenge)} \\ A \cap B &= \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\} && \text{(Schnittmenge)} \\ A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\} && \text{(Vereinigung)} \\ A^C &= V \setminus A = \{x \in V \mid x \notin A\} && \text{(Absolutes Komplement)} \end{aligned}$$

eine Boolesche Algebra ist.

Aufgabe 3

(6 Punkte)

a) Bestimme für die folgende Funktion die Menge der Primimplikanten mit dem Verfahren von Quine-McCluskey:

$$f \in \mathcal{B}_5 \text{ mit } \text{ON}(f)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \{ (11100), (10100), (10000), (10101), (10010), \\ (11010), (01110), (01100), (00110), (00100), \\ (11000), (11110), (10110) \}$$

b) Stelle für die in Teil a) berechneten Primimplikanten eine Primimplikantentafel auf und bestimme durch Anwenden der Reduktionsregeln ein Minimalpolynom für f .

Aufgabe 4

(7 Punkte)

a) Zeige, dass es für jede Boolesche Funktion $f \in B_n$ eine *Ringsummendarstellung* gibt, die keine negativen Literale enthält. D.h., beweise folgende Aussage:

Jede Funktion $f \in B_n$ lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$f = \bigoplus_{i=1}^m x_{i_1} \dots x_{i_{l_i}}$$

mit

- $\forall 1 \leq i \leq m, \forall 1 \leq j \leq l_i ((x_{i_j} \in \{x_1 \dots x_n\} \vee (l_i = 1 \wedge x_{i_1} = 1)) \wedge \forall p \neq q (x_{i_p} \neq x_{i_q}))$,
d.h. ein Monom ist entweder die Konstante 1 oder besteht vollständig aus positiven Literalen und kein Literal kommt zweimal in einem Monom vor,
- $x_{i_1} \dots x_{i_{l_i}} \neq x_{j_1} \dots x_{j_{l_j}}$ für $i \neq j$,
d.h. jedes Monom darf maximal einmal auftreten.

b) Zeige oder widerlege:

Die in obiger Gleichung angegebene Darstellung ist für jedes $f \in B_n$ eindeutig.

Bemerkung:

Die Ringsummendarstellung ist auch bekannt unter dem Namen *Positiv Polarity Reed Muller*-Darstellung, die nach den amerikanischen Mathematikern Reed und Muller benannt ist. Zuvor in den 30er Jahren des 20. Jahrhunderts wurde diese kanonische Darstellung von dem russischen Mathematiker Zhegalkin beschrieben und entsprechend *Zhegalkin Polynom* genannt.

Zusatzaufgabe (Lösung bitte auf einem extra Blatt abgeben)

(10 Punkte)

Die Ringsummendarstellung wird „Positive Polarity Reed Muller“-Darstellung (PPRM) genannt, weil zu jeder Variable x nur das *positive* Literal x , nicht aber das negative Literal \bar{x} in der Darstellung einer Funktion vorkommt. Eine Erweiterung stellt die „Fixed Polarity Read Muller“-Darstellung (FPRM) dar. Hierbei wird gewählt, ob zu jeder Variable x *nur* das positive Literal x oder *nur* das negative Literal \bar{x} verwendet wird, aber nicht beide.

- Gib analog zur Definition eines Ausdrucks in PPRM-Darstellung in Aufgabe 4 a) eine Definition der FPRM-Darstellung an.
- Gib einen Algorithmus zur Konvertierung eines FPRM-Ausdrucks in einen äquivalenten PPRM-Ausdruck an. Begründe dabei die Äquivalenz der Ein- und Ausgabe des Algorithmus.
- Die Größe einer FPRM-Darstellung wird in der Anzahl der Monome gemessen (in der vorigen Aufgabe m). Die Wahl der Polarität beeinflusst die Größe sehr stark (vgl. die Funktion $f = \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n$ in PPRM-Darstellung). Gib einen Algorithmus zur optimalen Wahl der Polaritäten für eine beliebige Boolesche Funktion an.
- Beschränkt man sich auf symmetrische Boolesche Funktionen lässt sich die optimale Wahl in polynomial vielen Schritten (in Abhängigkeit von n) treffen. Gib einen Algorithmus an.

Definition: Eine Boolesche Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ heißt genau dann *symmetrisch*, wenn der Funktionswert durch einen Vektor $w = (w_0, \dots, w_n)$, $w_i \in \{0, 1\}$ angegeben werden kann, wobei

$$w_i = 1$$

gdw.

$$f(a_1, \dots, a_n) = 1 \text{ und } |\{a_j, j = 1 \dots n : a_j = 1\}| = i$$

Anschaulich: Der Funktionswert einer symmetrischen Funktion ist nur von der Anzahl der Einsen im Argument, nicht aber von deren Position abhängig.

Abgabetermin: zu Beginn der Vorlesung am 11.06.2009