Universität Bremen – Fachbereich 3
Mathematik & Informatik

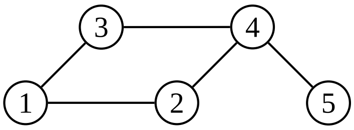
Prof. Dr. Rolf Drechsler, drechsler@informatik.uni-bremen.de, MZH 3510
Dipl.-Inf. Mathias Soeken, msoeken@informatik.uni-bremen.de, MZH 3560

5. Übungsblatt zur Vorlesung

Technische Informatik 1

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Betrachte den folgenden Graphen $G = (V, E)$:



a) Beschreibe den Graphen $G = (V, E)$ formal, wobei V die Menge der Knoten und E die Menge der Kanten bezeichnet.

b) Ein Graph ist k-färbbar, wenn jedem Knoten $v \in V$ eine *Farbe* von 1 bis k zugeordnet werden kann und benachbarte Knoten nicht die gleiche Farbe haben. Formal: Ein Graph ist genau dann k-färbbar, wenn es eine Abbildung $\mathrm{color} : V \to \{1, \ldots, k\}$ gibt, so dass $\mathrm{color}(v) \neq \mathrm{color}(w)$ für alle $\{v, w\} \in E$.
Finde eine minimale Anzahl von Farben k, so dass der Graph k-färbbar ist. Gib eine konkrete Zuordnung der Knoten zu den Farben an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zur Informationsübertragung in Multicomputern stehen für jeden Prozessor verschiedene Übertragungsarten zur Verfügung. Dazu gehören

- die Übertragung einer Nachricht an einen bestimmten anderen Prozessor (*point-to-point*).
- die Übertragung einer Nachricht an **alle** anderen Prozessoren (*broadcast*).

Betrachte nun einen Multicomputer mit n Prozessoren. Berechne je eine obere (*worst case*) und eine untere Schranke (*best case*) für die benötigte Zeit

1. einer *point-to-point* Übertragung
2. einem *broadcast*

bei folgenden Verbindungsstrukturen:

a) Ring

b) k-dimensionaler Hypercube (hier sei $n = 2^k$)

Dabei wird angenommen, dass die Übertragung über eine Kante einen Zeitschritt benötigt. Ein Knoten kann gleichzeitig an alle seine benachbarten Knoten senden und es dürfen mehrere Knoten gleichzeitig senden. Alle Schranken sollen in Abhängigkeit von n angegeben werden (nicht in Abhängigkeit von k). Begründe die Antworten.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Die Topologie eines Multicomputers sei wie folgt gegeben:
Die Verbindungsstruktur ist auf der Basis eines 1-dimensionalen Arrays P definiert. Das Array P besitzt $n-1$ Elemente ($P[1], \dots, P[n-1]$), wobei $n = 2^k$ gilt. Die Arrayelemente $P[i]$ stellen dabei die Prozessorknoten dar. Die Verbindungen zwischen den Prozessorknoten sind gegeben durch folgende Bedingung:

Zwischen $P[i]$ und $P[j]$ ($1 \leq i < j < n$) existiert genau dann eine Verbindung, wenn

- $i < n/2$ und
- $j = 2 \cdot i$ oder
  $j = 2 \cdot i + 1$ gelten.

Bestimme für diese Verbindungsstruktur
a) die Anzahl der Kanten,
b) den Grad,
c) und den Durchmesser.

Hinweis:
Transformiere die Verbindungsstruktur in einen Graphen $G = (V, E)$ für $n = 8, 16, \dots$

Aufgabe 4 (8 Punkte)

In der Vorlesung wurden der Durchmesser, der Grad und die Anzahl der Verbindungen als Charakteristika eines Netzwerkes von Rechnern vorgestellt. Zwei weitere Maße sind die Knotenkonnektivität und die Kantenkonnektivität. Sie sind wie folgt definiert (Sei G dabei ein ungerichteter Graph):

Definition: *Knotenkonnektivität* $nc(G)$
Für eine beliebige Teilmenge $M \subseteq V$ bezeichne $G_{V \setminus M}$ den Restgraphen, der durch Löschen der Knoten in M, sowie der zugehörigen Kanten entsteht, d.h.

$$G_{V \setminus M} = (\ V \setminus M,\ E \cap ((V \setminus M) \times (V \setminus M))\ )$$

Dann ist die *Knotenkonnektivität* des Graphen G:

$$nc(G) := \min_{M \subseteq V} \{|M| : \text{Es gibt } i, j \in V \setminus M, \text{ so dass es in } G_{V \setminus M} \text{ keinen Pfad zwischen } i \text{ und } j \text{ gibt}\}$$

Definition: *Kantenkonnektivität* $ec(G)$
Für eine beliebige Teilmenge $F \subseteq E$ bezeichne $G_{E \setminus F}$ den Restgraphen, der durch Löschen der Kanten in F entsteht, d.h.

$$G_{E \setminus F} = (\ V,\ E \setminus F\ )$$

Dann ist die *Kantenkonnektivität* des Graphen G:

$$ec(G) := \min_{F \subseteq E} \{|F| : \text{Es gibt } i, j \in V, \text{ so dass es in } G_{E \setminus F} \text{ keinen Pfad zwischen } i \text{ und } j \text{ gibt}\}$$

a) Gib eine inhaltliche Interpretation der beiden Maße in Bezug auf die Ausfallsicherheit eines Netzwerkes an.
b) Bestimme die Knotenkonnektivität und die Kantenkonnektivität:
   - nc_S^k / ec_S^k eines Meshs (Torusähnliches Gitter) mit $k \times k$ Knoten,
   - nc_R^k / ec_R^k eines Rings aus k Knoten,
   - nc_H^k / ec_H^k eines k-dimensionalen Hypercubes.
c) Welches Problem tritt auf, wenn man die Knotenkonnektivität eines vollständigen Verbindungsgraphen bestimmen will? (Hinweis: Überlege Dir die Antwort im Zusammenhang mit der inhaltlichen Bedeutung der Knotenkonnektivität).

Abgabetermin: zu Beginn der Vorlesung am 20.05.2010