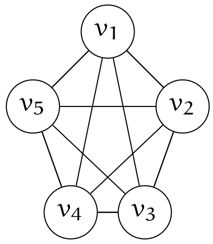
Prof. Rolf Drechsler, drechsler@informatik.uni-bremen.de, MZH 3510
Heinz Riener, hriener@informatik.uni-bremen.de, MZH 3080

5. Übungsblatt zur Vorlesung

Technische Informatik 1

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Ein endlicher, ungerichteter *Graph* G=(V,E) besteht aus einer endlichen Menge V, genannt *Knoten*, und einer endlichen Menge $E \subseteq \{\{a, b\} \mid a, b \in V\}$, genannt *Kanten*. Graphen werden oft visuell durch Kreise (Knoten) und Verbindungen zwischen den Kreisen (Kanten) dargestellt.



a) Gib explizit die Menge V und die Relation E für den dargestellten (endlichen, ungerichteten) Graph an.

b) Ein Graph ist k-*färbbar*, wenn jedem Knoten $v \in V$ eine Farbe aus der Menge $\{1, 2, \ldots, k\}$ zugeordnet werden kann, wobei *benachbarten* Knoten nicht dieselbe Farbe zugeordnet werden darf. Zwei Knoten heißen benachbart, falls eine Kante zwischen den Knoten besteht. Finde eine minimale Anzahl von Farben k, so dass der Graph k-färbbar ist. Gib eine konkrete Zuordnung der Knoten zu den Farben an, d.h., finde eine totale Funktion $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$, sodass $c(i) \neq c(j)$ für $\{i, j\} \in E$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zur Informationsübertragung in Multicomputern stehen für jeden Prozessor verschiedene Übertragungsarten zur Verfügung. Dazu gehören

- die Übertragung einer Nachricht an einen bestimmten anderen Prozessor (*point-to-point*).
- die Übertragung einer Nachricht an alle anderen Prozessoren (*broadcast*).

Betrachte nun einen Multicomputer mit n Prozessoren. Berechne jeweils die stärkste obere Schranke (*worst case*) und die stärkste untere Schranke (*best case*) für die benötigte Zeit (a) einer point-to-point Übertragung und (b) einer broadcast Übertragung bei den Verbindungsstrukturen Ring und k-dimensionaler Hypercube (für $n = 2^k$). (Es sind also insgesamt 4 Fälle zu unterscheiden bzw. 8 Schranken zu finden.)

Dabei wird angenommen, dass die Übertragung über eine Kante einen Zeitschritt benötigt. Ein Knoten kann gleichzeitig an alle benachbarten Knoten senden und es dürfen mehrere Knoten gleichzeitig senden. Alle Schranken sollen in Abhängigkeit von n angegeben werden (nicht in Abhängigkeit von k). Begründe jede Antwort ausführlich.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Die Topologie eines Multicomputers sei wie folgt gegeben: Die Verbindungsstruktur ist auf Basis eines 1-dimensionalen Felds F definiert. Das Feld F besitzt $n-1$ Elemente $(F[1], F[2], \ldots, F[n-1])$ mit $n = 2^k$.

Die Elemente des Feldes $F[i]$ stellen dabei die Prozessorknoten dar. Die Verbindungen zwischen den Prozessorknoten durch die folgenden Bedingungen geben: Zwischen $F[i]$ und $F[j]$ $(1 \leq i < j < n)$ existiert genau dann eine Verbindung, wenn

- $i < n/2$ und
- $j = 2 \cdot i$ oder $j = 2 \cdot i + 1$ gelten.

Bestimme für diese Verbindungsstruktur

a) die Anzahl der Kanten,

b) den Grad,

c) und den Durchmesser.

Hinweis: Transformiere die Verbindungsstruktur in einen Graphen $G = (V, E)$ für $n = 8, 16, \ldots$.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

In der Vorlesung wurden der Durchmesser, der Grad, und die Anzahl der Verbindungen als Charakteristika eines Graphen G, der ein Netzwerk von Rechnern modelliert, vorgestellt. Zwei weitere Maße die sich auf einem ungerichteten Graphen definieren lassen, sind die *Knotenkonnektivität* und die *Kantenkonnektivität*.

Für eine beliebige Teilmenge $M \subseteq V$ bezeichne $G_{V \setminus M}$ den Restgraphen, der durch Löschen der Knoten in M, sowie der zugehörigen Kanten entsteht, d.h.

$$G_{V \setminus M} = (\, V \setminus M,\ E \cap \{\{v, w\} \mid v, w \in V \setminus M\})$$

Dann ist die *Knotenkonnektivität* des Graphen G:

$$nc(G) := \min_{M \subseteq V} \{|M| \mid \text{Es gibt } i, j \in V \setminus M, \text{ so dass es in } G_{V \setminus M} \text{ keinen Pfad zwischen } i \text{ und } j \text{ gibt}\}$$

Für eine beliebige Teilmenge $F \subseteq E$ bezeichne $G_{E \setminus F}$ den Restgraphen, der durch Löschen der Kanten in F entsteht, d.h.

$$G_{E \setminus F} = (\, V,\ E \setminus F\,)$$

Dann ist die *Kantenkonnektivität* des Graphen G:

$$ec(G) := \min_{F \subseteq E} \{|F| \mid \text{Es gibt } i, j \in V, \text{ so dass es in } G_{E \setminus F} \text{ keinen Pfad zwischen } i \text{ und } j \text{ gibt}\}$$

die Kantenkonnektiviät des Graphen G.

a) Gib eine inhaltliche Interpretation der beiden Maße in Bezug auf die Ausfallsicherheit eines Netzwerkes an.

b) Bestimme die Knotenkonnektivität und die Kantenkonnektivität:
   - $nc(S_k)$ / $ec(S_k)$ eines Meshs S mit $k \times k$ Knoten,
   - $nc(R_k)$ / $ec(R_k)$ eines Rings R aus k Knoten,
   - $nc(H_k)$ / $ec(H_k)$ eines k-dimensionalen Hypercubes H.

   Hinweis: Überlege Dir die Antwort im Zusammenhang mit der inhaltlichen Bedeutung der Knotenkonnektivität.

Abgabetermin: vor Beginn der Vorlesung am 26. Mai 2011