Universität Bremen – Fachbereich 3
Mathematik & Informatik

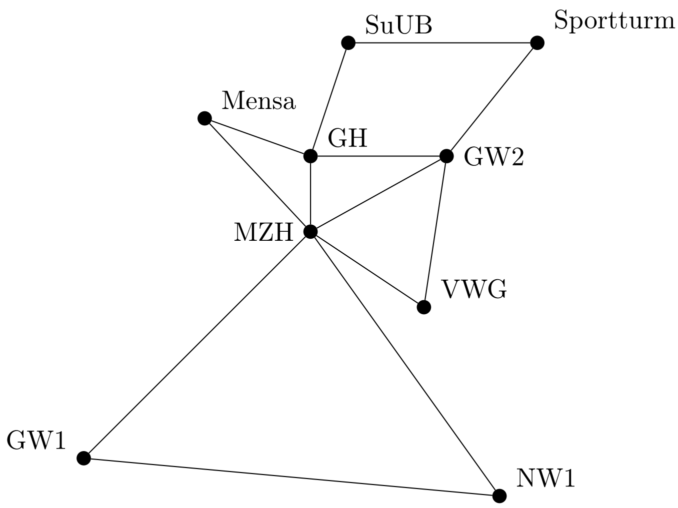
Prof. Dr. Rolf Drechsler, drechsler@informatik.uni-bremen.de, MZH 3510
Dr. Robert Wille, rwille@informatik.uni-bremen.de, MZH 3485
Oliver Keszöcze, keszocze@informatik.uni-bremen.de, MZH 3440

5. Übungsblatt zur Vorlesung

Technische Informatik 1

Aufgabe 1 (1+1 Punkte)

Um den Informatik-Studierenden der Universität Bremen die Orientierung zu erleichtern, wurde der folgende Plan mit den wichtigsten Punkten des Campus' angefertigt:



a) Beschreibe den Plan formal als ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, wobei V die Menge der Knoten und $E \subseteq \{\{v, w\} \mid v, w \in V\}$ die Menge der Kanten bezeichnet.

b) Nenne zwei Pfade von der *Mensa* zum *Sportturm* im Graphen G.
Dabei ist ein *Pfad* von v_0 nach v_l eine Folge $v_0, v_1, \dots, v_l$ von (nicht notwendig verschiedenen) Knoten $v_i \in V$, $0 \leq i \leq l$, so dass für $i = 0, \dots, l-1$ gilt: $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$.
Wie viele Pfade von der *Mensa* zum *Sportturm* gibt es?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zur Informationsübertragung in Multicomputern stehen für jeden Prozessor verschiedene Übertragungsarten zur Verfügung. Dazu gehören

- die Übertragung einer Nachricht an einen bestimmten anderen Prozessor (*point-to-point*).
- die Übertragung einer Nachricht an *alle* anderen Prozessoren (*broadcast*).

Betrachte nun einen Multicomputer mit n Prozessoren. Berechne jeweils die obere Schranke (*worst case*) und die untere Schranke (*best case*) für die benötigte Zeit (a) einer point-to-point-Übertragung und (b) einer broadcast-Übertragung bei den Verbindungsstrukturen Ring und k-dimensionaler Hypercube (für $n = 2^k$). Es sind also insgesamt vier Fälle zu unterscheiden bzw. acht Schranken zu finden.

Dabei wird angenommen, dass die Übertragung über eine Kante einen Zeitschritt benötigt. Ein Knoten kann gleichzeitig an alle benachbarten Knoten senden und es dürfen mehrere Knoten gleichzeitig senden. Alle Schranken sollen in Abhängigkeit von n angegeben werden (nicht in Abhängigkeit von k). Begründe jede Antwort ausführlich.

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte)

Die Topologie eines Multicomputers sei wie folgt gegeben:

Die Verbindungsstruktur ist auf Basis eines 1-dimensionalen Arrays P definiert. Das Array P besitzt $n-1$ Elemente $(P[1], P[2], \ldots, P[n-1])$ mit $n = 2^k$. Die Arrayelemente $P[i]$ stellen dabei die Prozessorknoten dar. Die Verbindungen zwischen den Prozessorknoten sind durch die folgende Bedingung gegeben: Zwischen $P[i]$ und $P[j]$ $(1 \leq i < j < n)$ existiert genau dann eine Verbindung, wenn

- $i < \frac{n}{2}$ und
- $j = 2 \cdot i$ oder $j = 2 \cdot i + 1$ gelten.

Bestimme für diese Verbindungsstruktur

a) die Anzahl der Kanten,

b) den Grad

c) und den Durchmesser.

Tip: Transformiere die Verbindungsstruktur in einen Graphen $G = (V, E)$ für $n = 8, 16, \ldots$

Bonuspunkte: Für eine Lösung der Aufgabe mittels eines korrekten, formalen Beweises werden bis zu zwei Bonuspunkte vergeben.

Aufgabe 4 (2+4+2 Punkte)

In der Vorlesung wurden der Durchmesser, der Grad und die Anzahl der Verbindungen als Charakteristika eines Graphen G, der ein Netzwerk von Rechnern modelliert, vorgestellt. Zwei weitere Maße, die sich auf einem ungerichteten Graphen definieren lassen, sind die *Knotenkonnektivität* und die *Kantenkonnektivität*.

Für eine beliebige Teilmenge $M \subseteq V$ bezeichne $G_{V \setminus M}$ den Restgraphen, der durch Löschen der Knoten in M sowie der zugehörigen Kanten entsteht, d.h.

$$G_{V \setminus M} = (\ V \setminus M,\ E \cap \{\{v, w\} \mid v, w \in V \setminus M\})$$

Dann ist die Knotenkonnektivität des Graphen G:

$$nc(G) := \min_{M \subseteq V} \{|M| \mid \text{es gibt } i, j \in V \setminus M, \text{ so dass es in } G_{V \setminus M} \text{ keinen Pfad zwischen } i \text{ und } j \text{ gibt}\}$$

Für eine beliebige Teilmenge $F \subseteq E$ bezeichne $G_{E \setminus F}$ den Restgraphen, der durch Löschen der Kanten in F entsteht, d.h.

$$G_{E \setminus F} = (\ V,\ E \setminus F\ )$$

Dann ist die Kantenkonnektivität des Graphen G:

$$ec(G) := \min_{F \subseteq E} \{|F| \mid \text{es gibt } i, j \in V, \text{ so dass es in } G_{E \setminus F} \text{ keinen Pfad zwischen } i \text{ und } j \text{ gibt}\}$$

a) Gib eine inhaltliche Interpretation der beiden Maße in Bezug auf die Ausfallsicherheit eines Netzwerkes an.

b) Bestimme die Knotenkonnektivität und die Kantenkonnektivität:

   - $nc(S_k)$ / $ec(S_k)$ eines Meshs S mit $k \times k$ Knoten
   - $nc(R_k)$ / $ec(R_k)$ eines Rings R aus k Knoten
   - $nc(H_k)$ / $ec(H_k)$ eines k-dimensionalen Hypercubes H

c) Welches Problem tritt auf, wenn man die Knotenkonnektivität eines vollständigen Verbindungsgraphen bestimmen will? **Hinweis**: Überlege dir die Antwort im Zusammenhang mit der inhaltlichen Bedeutung der Knotenkonnektivität.

Abgabetermin: vor Beginn der Vorlesung am 16. Mai 2013