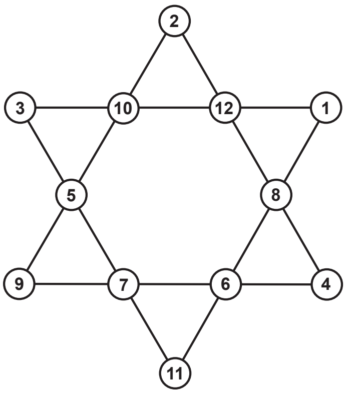
Prof. Dr. Rolf Drechsler, drechsle@informatik.uni-bremen.de, MZH 3510
Dr. Robert Wille, rwille@informatik.uni-bremen.de, MZH 3485
Philipp Niemann, pniemann@informatik.uni-bremen.de, MZH 3440

5. Übungsblatt zur Vorlesung

Technische Informatik 1

Aufgabe 1 (1+1 Punkte)

Dies ist ein *Magie-Stern*.



a) Beschreibe den Stern formal als einen Graphen $G = (V, E)$, wobei V die Menge der Knoten und E die Menge der Kanten bezeichnet.

b) Nenne zwei Pfade von Knoten `5` nach Knoten `1` im Graphen G.
Dabei ist ein *Pfad* von v_0 nach v_l eine Folge $v_0, v_1, \ldots, v_l$ von (nicht notwendig verschiedenen) Knoten $v_i \in V$, $0 \leq i \leq l$, so dass für $i = 0, \ldots, l-1$ gilt: $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$.
Wie viele Pfade von Knoten `5` nach Knoten `1` gibt es?

Zusatzaufgabe: (bis zu 2 Bonuspunkte)
Der Stern besitzt einige „magische" Eigenschaften. So ergeben die Zahlen entlang jeder Geraden die Summe 26. Wie muss man die Zahlen vertauschen, damit dies gleichzeitig auch für die Zahlen in den *Sternspitzen* (Knoten mit Grad 2) gilt? Wie viele (und welche) Zahlen muss man mindestens ändern, damit entlang der Geraden die Summe 42 entsteht? Und wie verhält es sich, wenn dies gleichzeitig auch wieder für die Sternspitzen gelten soll?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zur Informationsübertragung in Multicomputern stehen für jeden Prozessor verschiedene Übertragungsarten zur Verfügung. Dazu gehören

- die Übertragung einer Nachricht an einen bestimmten anderen Prozessor (*point-to-point*).
- die Übertragung einer Nachricht an *alle* anderen Prozessoren (*broadcast*).

Betrachte nun einen Multicomputer mit n Prozessoren. Berechne jeweils die obere Schranke (*worst case*) und die untere Schranke (*best case*) für die benötigte Zeit (a) einer point-to-point-Übertragung und (b) einer broadcast-Übertragung bei den Verbindungsstrukturen Token-Ring und k-dimensionaler Hypercube (für $n = 2^k$). Es sind also insgesamt vier Fälle zu unterscheiden bzw. acht Schranken zu finden.

Dabei wird angenommen, dass die Übertragung über eine Kante einen Zeitschritt benötigt. Ein Knoten kann gleichzeitig an alle benachbarten Knoten senden und es dürfen mehrere Knoten gleichzeitig senden (Token-Ring: senden nur im Uhrzeigersinn und bei Besitz des Tokens). Alle Schranken sollen in Abhängigkeit von n angegeben werden (nicht in Abhängigkeit von k). Begründe jede Antwort ausführlich.

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte)

Die Topologie eines Multicomputers sei wie folgt gegeben:

Die Verbindungsstruktur ist auf der Basis eines 1-dimensionalen Arrays P definiert. Das Array P besitzt $k^2 = n$ Elemente ($P[1] \dots P[n]$). Die Arrayelemente $P[i]$ stellen dabei die Prozessorknoten dar. Die Verbindungen zwischen den Prozessorknoten sind gegeben durch folgende Bedingung:

Zwischen $P[i]$ und $P[j]$ ($1 \leq i \leq j \leq n$) existiert genau dann eine Verbindung, wenn

- $j = i + k$ oder
- sowohl $i \mod k \neq 0$ als auch $j = i + 1$ gelten.

Bestimme für diese Verbindungsstruktur a) die Anzahl der Kanten, b) den Grad und c) den Durchmesser.

Tipp: Transformiere die Verbindungsstruktur in einen Graphen $G = (V, E)$ für $n = 4, 9, 16, \dots$

Bonuspunkte: Für eine Lösung der Aufgabe mittels eines korrekten, formalen Beweises werden bis zu zwei Bonuspunkte vergeben.

Aufgabe 4 (2+4+2 Punkte)

In der Vorlesung wurden der Durchmesser, der Grad und die Anzahl der Verbindungen als Charakteristika eines Graphen G, der ein Netzwerk von Rechnern modelliert, vorgestellt. Zwei weitere Maße, die sich auf einem ungerichteten Graphen definieren lassen, sind die *Knotenkonnektivität* und die *Kantenkonnektivität*.

Für eine beliebige Teilmenge $M \subseteq V$ bezeichne $G_{V\setminus M}$ den Restgraphen, der durch Löschen der Knoten in M sowie der zugehörigen Kanten entsteht, d.h.

$$G_{V\setminus M} = (\ V \setminus M,\ E \cap \{\{v, w\} \mid v, w \in V\setminus M\})$$

Dann ist die Knotenkonnektivität des Graphen G:

$$nc(G) := \min_{M\subseteq V} \{|M| \mid \text{es gibt } i, j \in V \setminus M, \text{ so dass es in } G_{V\setminus M} \text{ keinen Pfad zwischen } i \text{ und } j \text{ gibt}\}$$

Für eine beliebige Teilmenge $F \subseteq E$ bezeichne $G_{E\setminus F}$ den Restgraphen, der durch Löschen der Kanten in F entsteht, d.h.

$$G_{E\setminus F} = (\ V,\ E \setminus F\ )$$

Dann ist die Kantenkonnektivität des Graphen G:

$$ec(G) := \min_{F\subseteq E} \{|F| \mid \text{es gibt } i, j \in V, \text{ so dass es in } G_{E\setminus F} \text{ keinen Pfad zwischen } i \text{ und } j \text{ gibt}\}$$

a) Gib eine inhaltliche Interpretation der beiden Maße in Bezug auf die Ausfallsicherheit eines Netzwerkes an.

b) Bestimme die Knotenkonnektivität und die Kantenkonnektivität:

   - $nc(S_k)$ / $ec(S_k)$ eines Meshs S mit $k \times k$ Knoten
   - $nc(C_k)$ / $ec(C_k)$ eines Cube Connected Cycle (CCC) C aus $k \times \log_2 k$ Knoten
   - $nc(H_k)$ / $ec(H_k)$ eines k-dimensionalen Hypercubes H

c) Welches Problem tritt auf, wenn man die Knotenkonnektivität eines vollständigen Verbindungsgraphen bestimmen will? **Hinweis**: Überlege dir die Antwort im Zusammenhang mit der inhaltlichen Bedeutung der Knotenkonnektivität.

Abgabetermin: vor Beginn der Vorlesung am 05. Juni 2014