



Universität Bremen

Geometrische Algorithmen

Thomas Röfer

Motivation

Scan-line-Prinzip

Konvexe Hülle

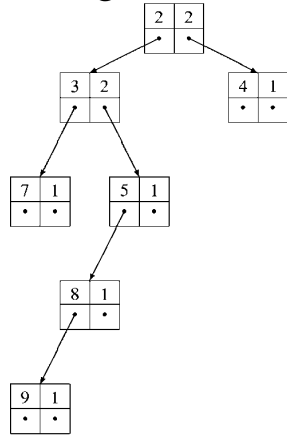
Distanzprobleme

Voronoi-Diagramm

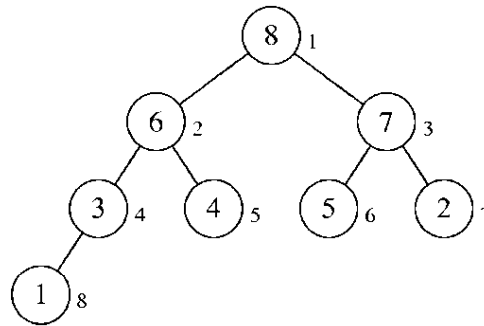


Rückblick „Manipulation von Mengen“

Vorrangwarteschlange

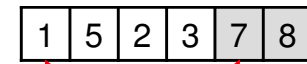


Heap

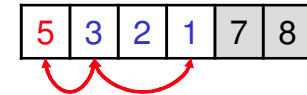


HeapSort

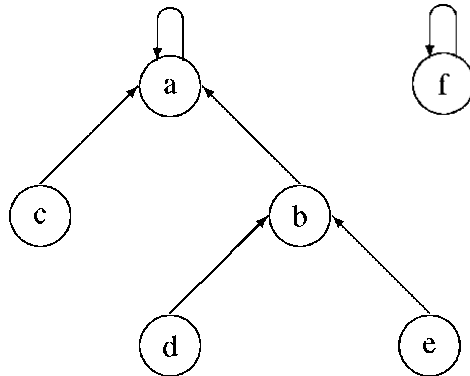
swap(a, 0, 4)



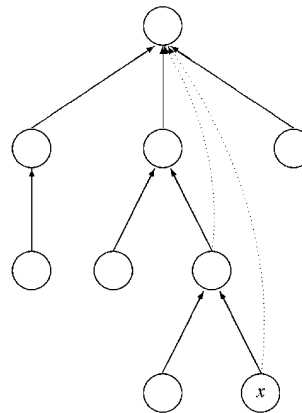
siftDown(a, 0, 3)



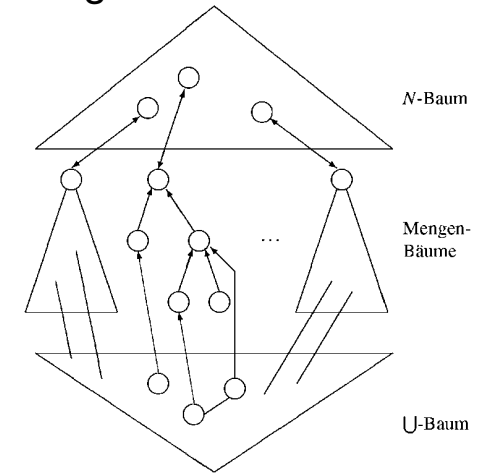
Union-Find-Strukturen



Pfadkompression



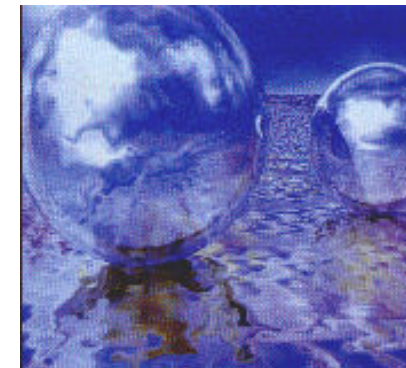
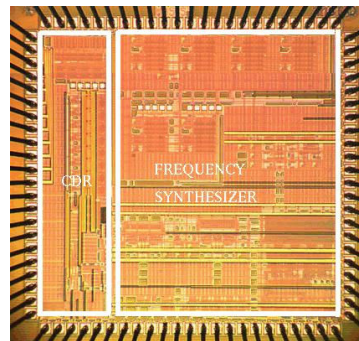
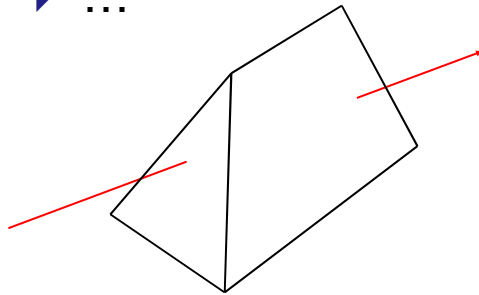
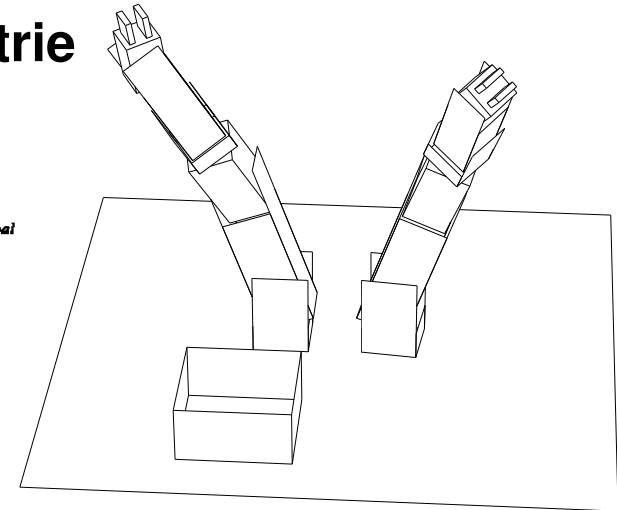
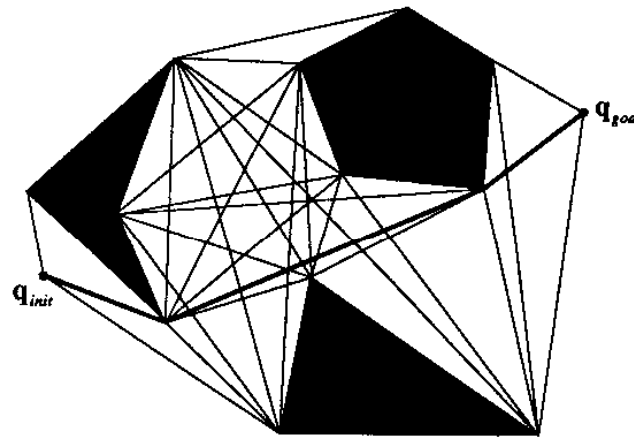
Allgemeiner Rahmen



Motivation

▶ Anwendungen für Algorithmische Geometrie

- ▶ Bildverarbeitung
- ▶ Computer-Grafik
- ▶ Geographie
- ▶ Kartographie
- ▶ Robotik
- ▶ Simulation
- ▶ Chip-Design
- ▶ ...



Scan-Line-Prinzip

▶ Motivation

- ▶ Probleme im zweidimensionalen Raum wie „welche Strecke schneidet welche andere Strecke“ oder „welche Strecke sieht welche andere Strecke“ lassen sich naiv nur mit einem Aufwand von $O(N^2)$ oder höher lösen
- ▶ Mit dem Scan-Line-Prinzip lässt sich der Aufwand aber auf $O(N \log N)$ drücken

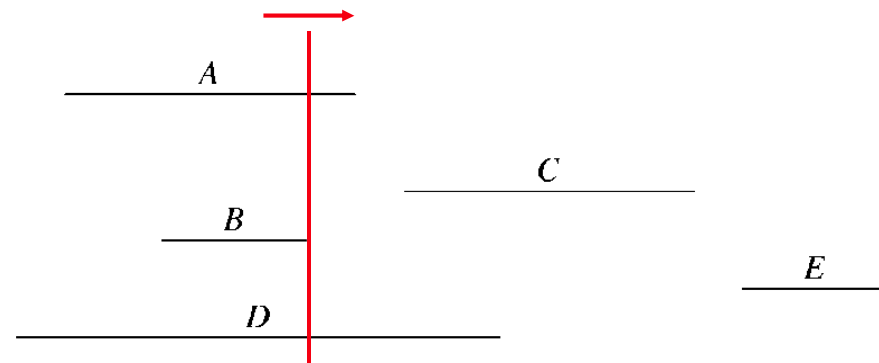
▶ Ansatz

- ▶ Die (End-)Punkte der Strecken werden nach der x -Koordinate sortiert
- ▶ Dann wandert die Scan-Line von Punkt zu Punkt (links nach rechts) und verwaltet einen nach y -Koordinaten sortierten Puffer der *offenen* Strecken

▶ Algorithmus

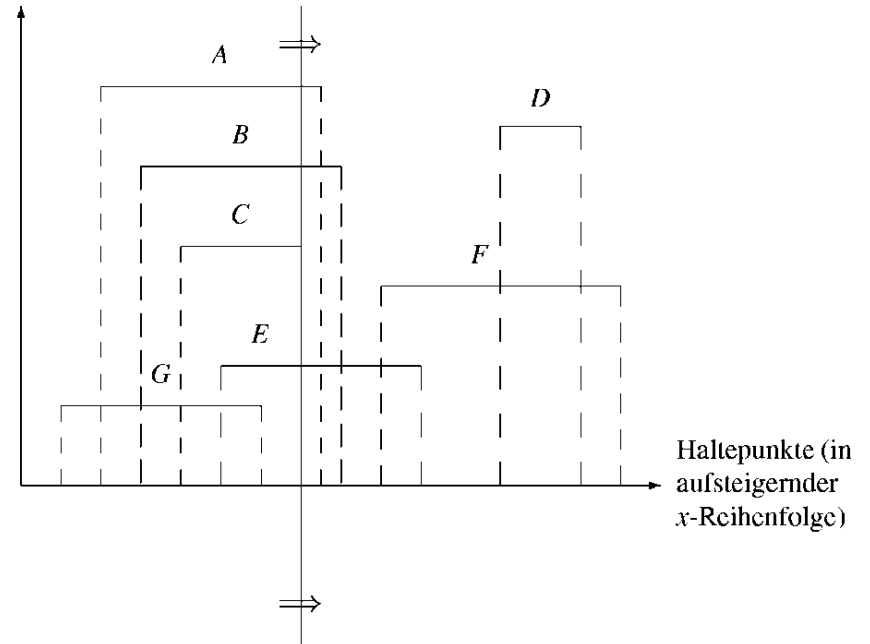
- ▶ Q ist objekt- und problemabhängige Folge von Haltepunkten in aufsteigender x -Reihenfolge
- ▶ Setze $L = \emptyset$
- ▶ Solange Q nicht leer
 - ▶ wähle nächsten Haltepunkt aus Q und entferne ihn aus Q
 - ▶ *update*(L) und gib (problemabhängige) Teilantwort aus

▶ Beispiel: Sichtbarkeitsproblem



Scan-Line-Prinzip – Sichtbarkeit

- ▶ Q ist Folge der $2N$ Anfangs- und Endpunkte von Elementen in S in aufsteigender x -Reihenfolge
- ▶ L ist Menge der aktiven Liniensegmente in aufsteigender y -Reihenfolge. Anfangs $L = \emptyset$
- ▶ Solange Q nicht leer
 - ▶ p ist nächster Haltepunkt aus Q
 - ▶ Wenn p Startpunkt eines Segments s
 - ▶ Füge s in L ein
 - ▶ Bestimme die Nachbarn s' und s'' von s in L und gib (s, s') und (s, s'') aus
 - ▶ Ansonsten ist p Endpunkt von s
 - ▶ Bestimme die Nachbarn s' und s'' von s in L und gib (s', s'') aus
 - ▶ Entferne s aus L
- ▶ **Aufwand**
 - ▶ Sortieren: $O(2N \log 2N)$
 - ▶ Durchlaufen: $2N O(\log N)$



G	A	A	A	A	A	A
G	B	B	B	B	B	B
G	C	C	C	E		
G	E	E				
G						

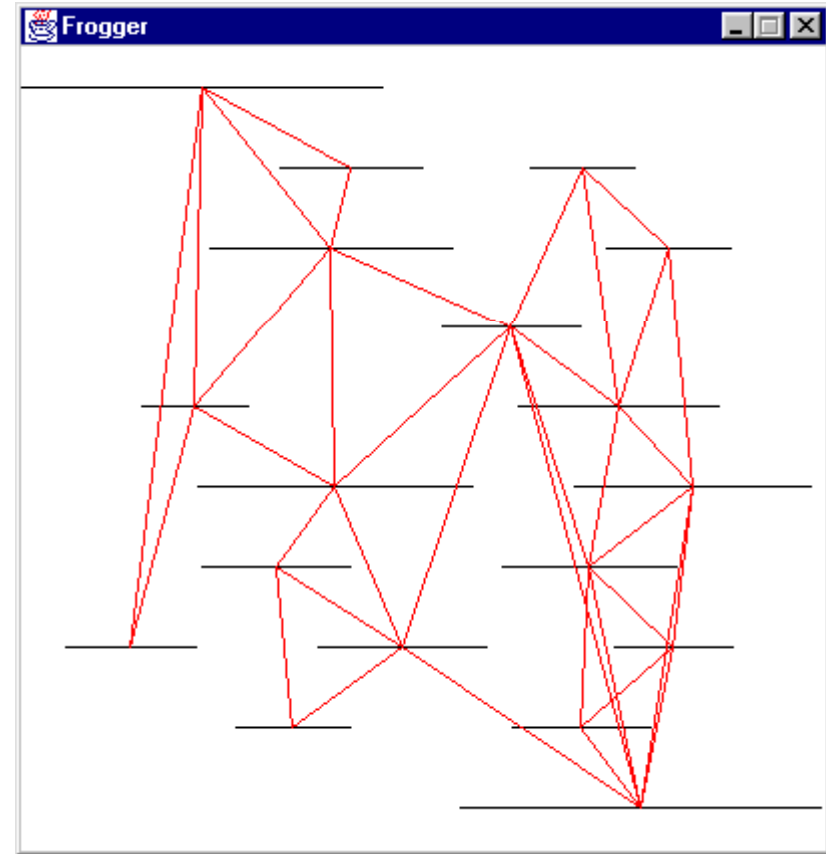
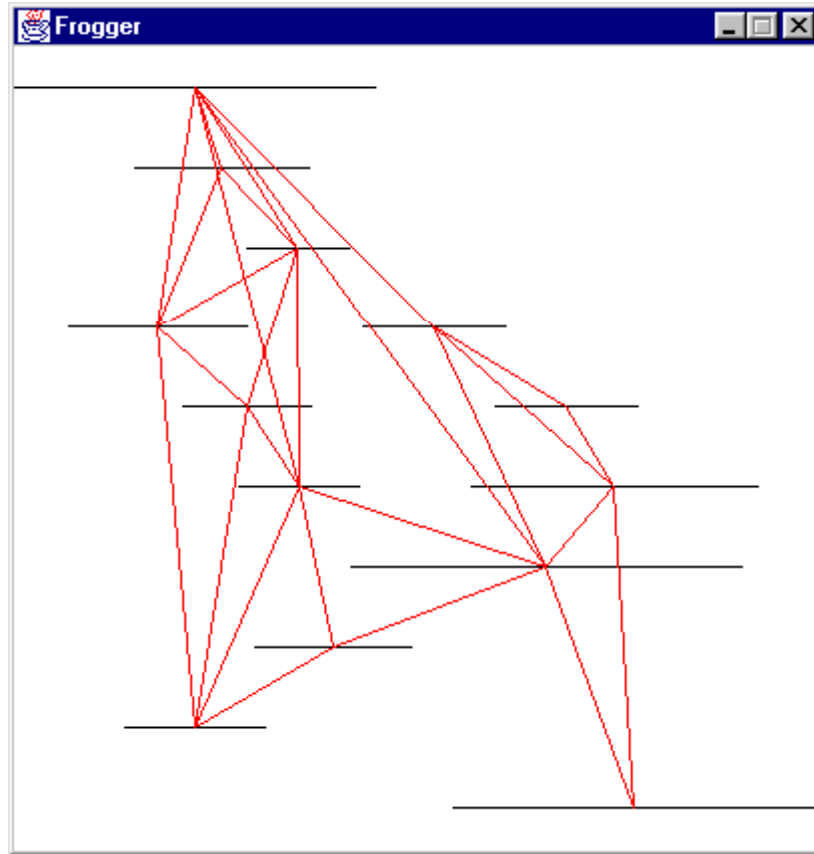
Haltepunkte (in aufsteigender x -Reihenfolge)

L am jeweiligen Haltepunkt (in aufsteigender y -Reihenfolge)

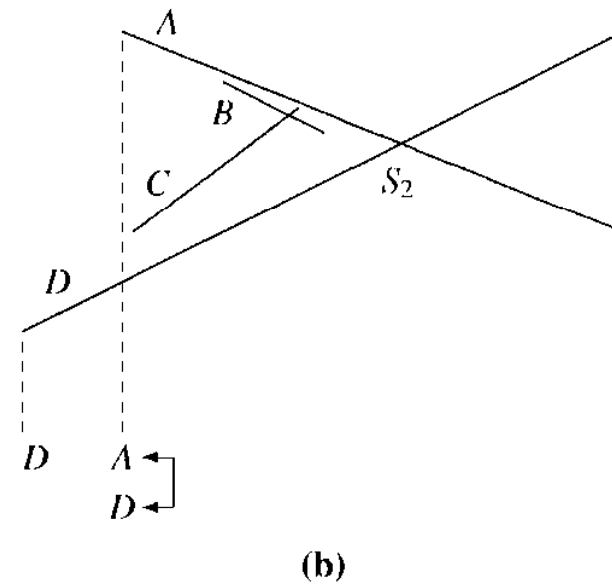
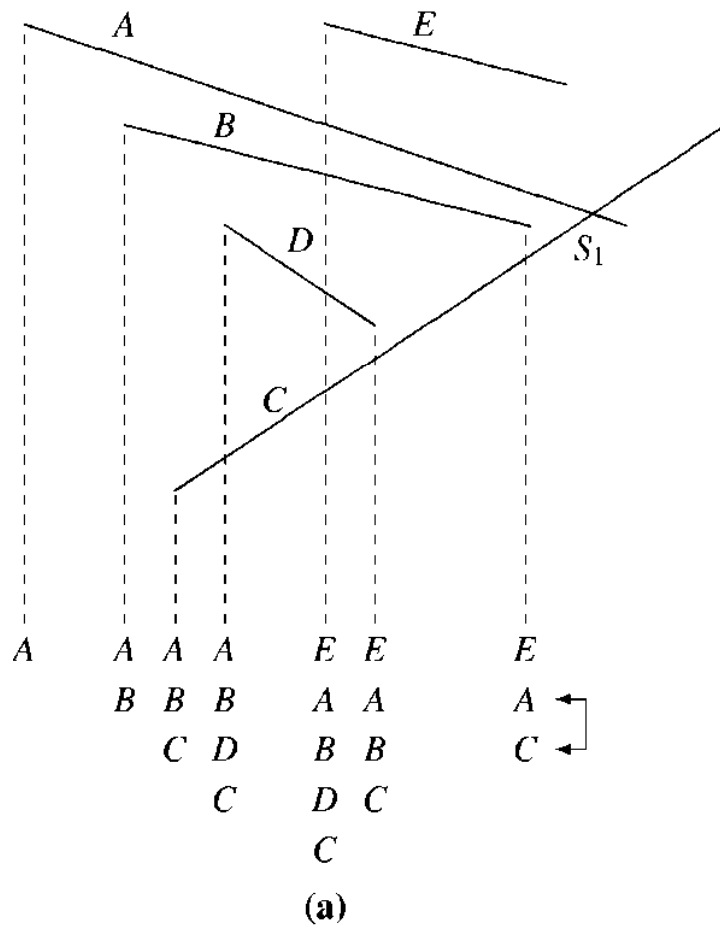
Ausgabe: $(A,G), (A,B), (B,G), (B,C), (C,G), (C,E), (E,G), (B,E)$



Scan-Line-Prinzip – Sichtbarkeit

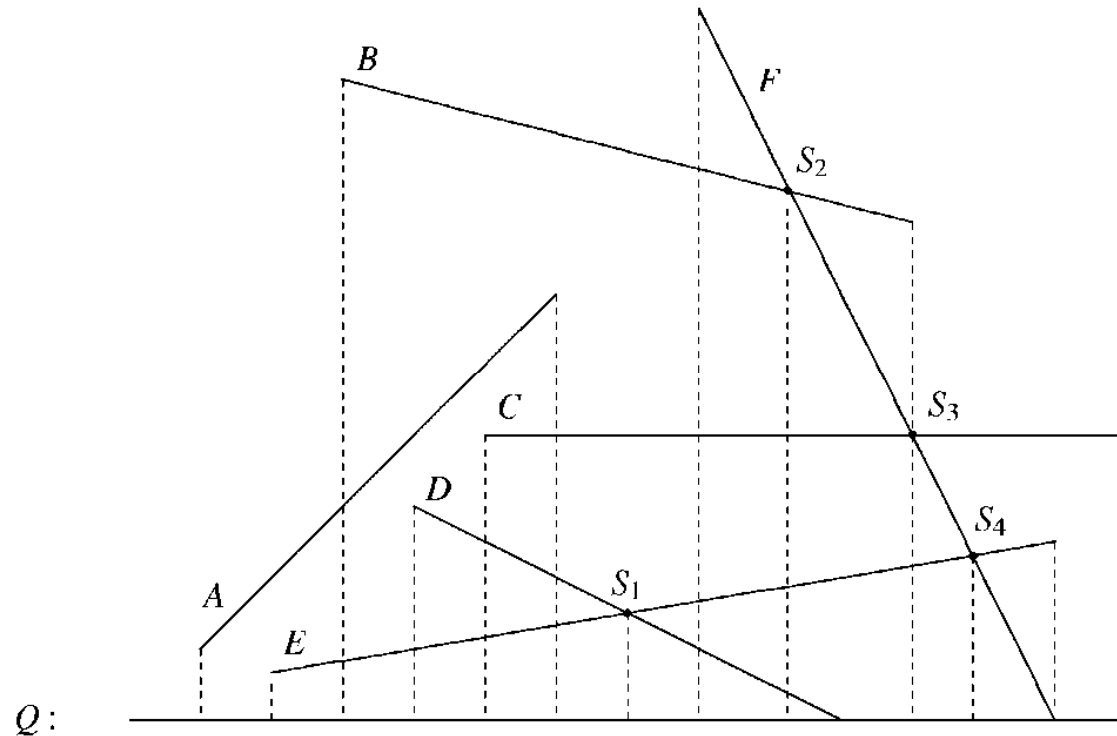


Scan-Line-Prinzip – Schnittpunkte





Scan-Line-Prinzip – Schnittpunkte



Q:
 L: \emptyset A A B B B B B F B B C C C \emptyset
 E A A A C C C B F F F E E
 E D C D E C C C E E
 E D E D E E E E
 E D D

Konvexe Hülle

▶ Definition

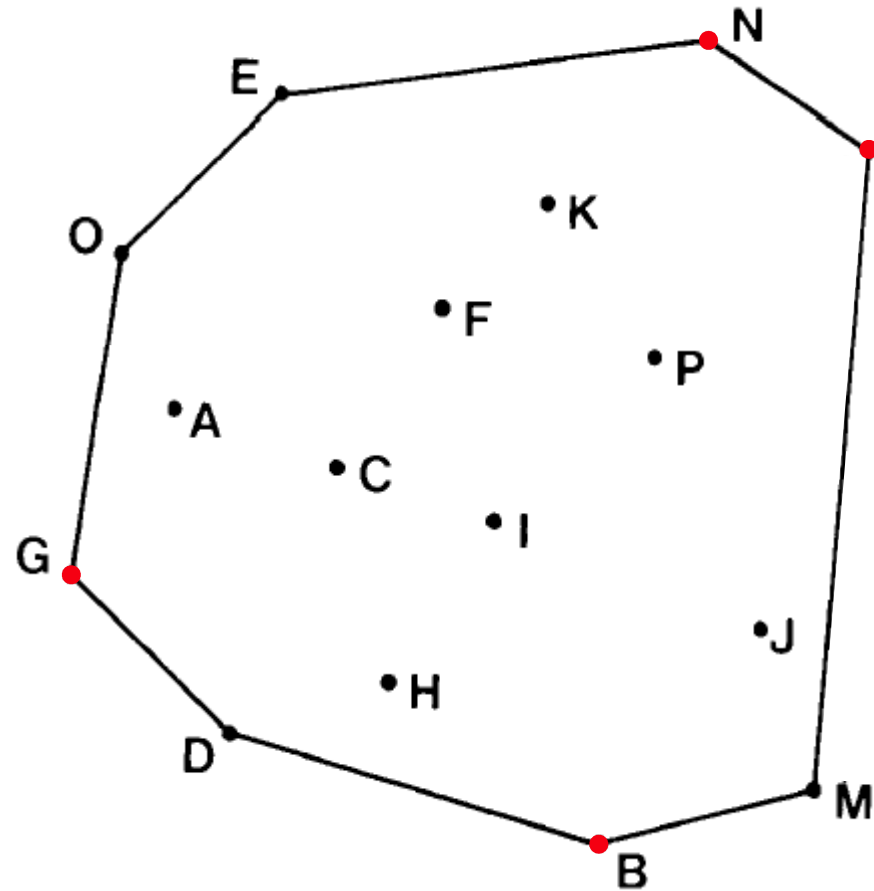
- ▶ Die *Konvexe Hülle* zu einer Punktmenge P ist das kleinste Polygon G , das alle Punkte aus P umschließt

▶ Eigenschaften

- ▶ Jede Verbindungsgerade zwischen zwei Punkten aus P liegt ebenfalls innerhalb der konvexen Hülle
- ▶ Jede Gerade außerhalb der konvexen Hülle, die gegen die Hülle geschoben wird, wird zuerst einen der Eckpunkte berühren

▶ Garantierte Hüllpunkte

- ▶ Punkte mit minimalen oder maximalen x - oder y -Koordinaten



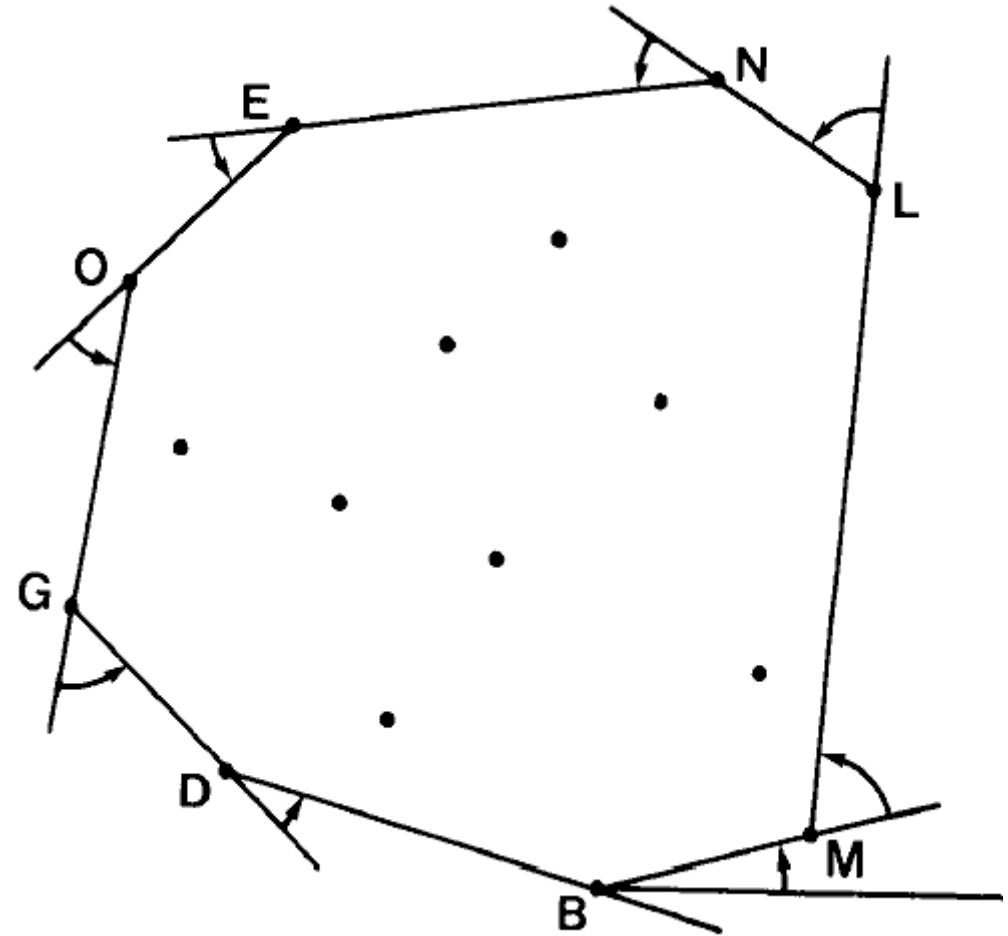
Konvexe Hülle – Package Wrapping

▶ Algorithmus

1. p_0 ist der Punkt mit minimaler y-Koordinate
2. Setze $p = p_0$
3. Nimm an, die vorherige Kante wäre waagrecht gewesen
4. Suche den Punkt p' , bei dem der Winkel zwischen (p, p') und der vorherigen Kante minimal ist
5. Füge p' zur konvexen Hülle hinzu
6. Setze $p = p'$
7. Fahre mit 4. fort, solange $p \neq p_0$

▶ Aufwand

- ▶ n mal nach dem Punkt mit dem kleinsten Winkel suchen: $O(n^2)$



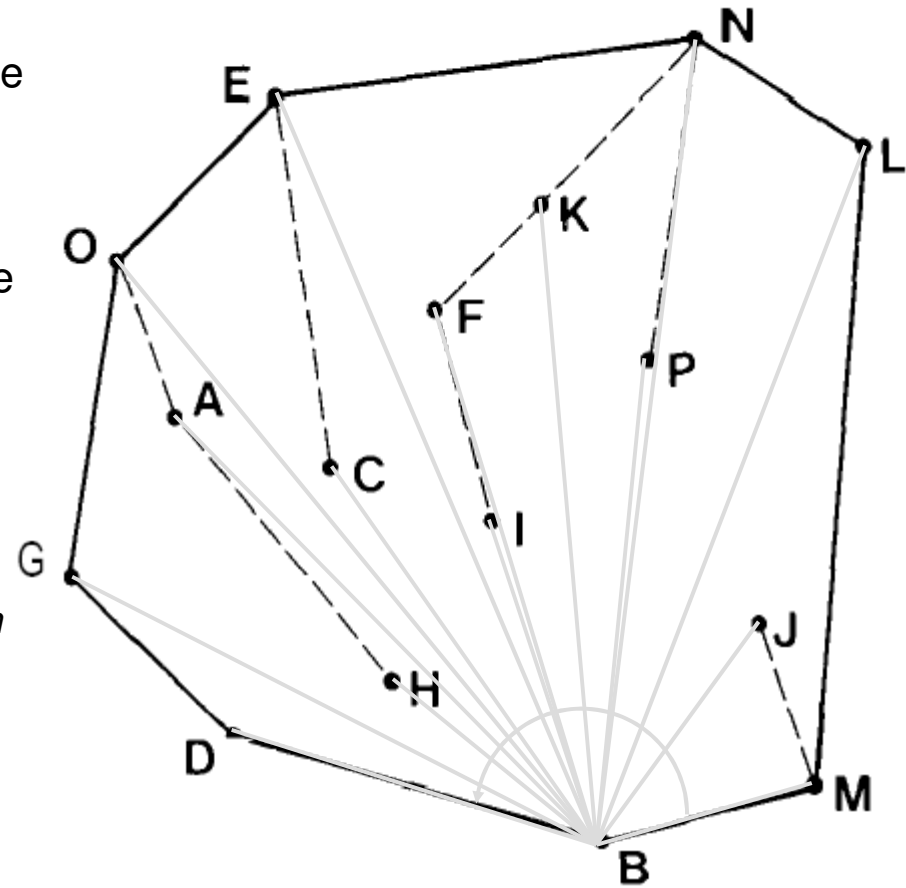
Konvexe Hülle – Graham Scan

▶ Algorithmus

- ▶ p_0 ist der Punkt mit minimaler y -Koordinate
- ▶ Berechne für jeden Punkt p_i den Winkel zwischen der Waagerechten und der Strecke (p_0, p_i)
- ▶ Sortiere die Punkte danach. Falls mehrere den gleichen Winkel haben, werden sie in der Reihenfolge ihres Abstands abgelegt
- ▶ Lege p_0 , p_1 und p_2 auf einem Stack S ab
- ▶ Für alle weiteren Punkte p_i in der Reihenfolge der Sortierung
 - ▶ Solange p_i auf oder rechts von der Geraden $(nextToTop(S), top(S))$ liegt, wird $top(S)$ vom Stack S entfernt
 - ▶ Danach wird p_i auf dem Stack S abgelegt

▶ Aufwand

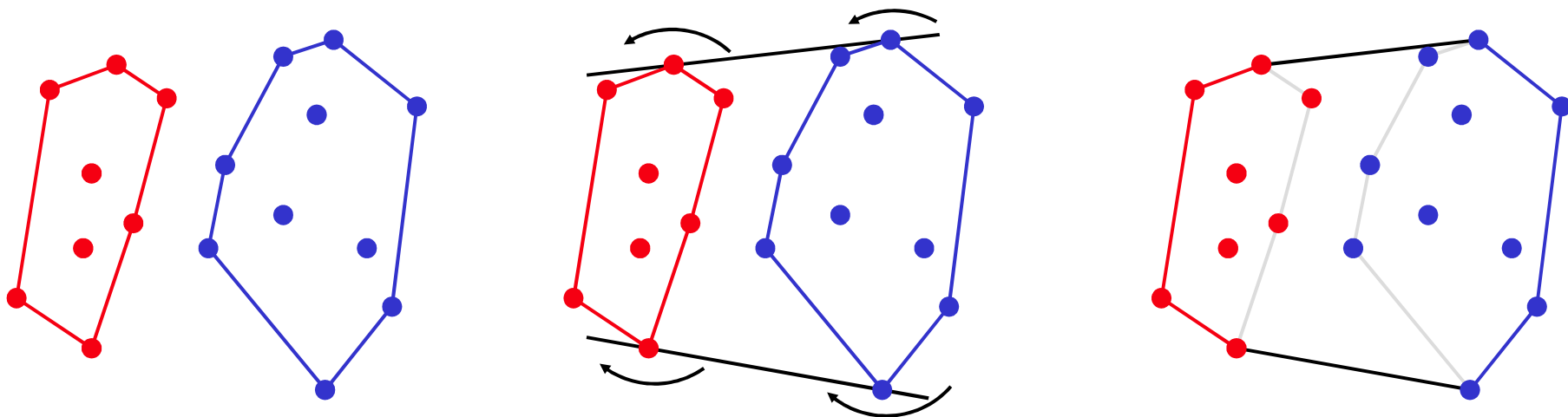
- ▶ Sortierung: $O(N \log N)$
- ▶ Scan: $O(2N)$



Konvexe Hülle – Divide and Conquer

▶ Algorithmus

- ▶ Falls eine Punktmenge nur ein Element enthält, ist dieser Punkt die konvexe Hülle
- ▶ Ansonsten zerlege die Punktmenge so in zwei Hälften, dass alle Punkte der einen Menge links von allen Punkten der zweiten Menge liegen
- ▶ Berechne die konvexen Hüllen für beide Teilmengen
- ▶ Bestimme die obere und untere Tangente der beiden Hüllen
- ▶ Die Geraden zwischen den Punkten auf diesen Tangenten verbinden die beide Hüllen
- ▶ Die dazwischen (innerhalb) liegenden Punkte der beiden Teilhüllen werden gelöscht





Distanzprobleme

▶ Dichtestes Punktepaar

- ▶ Gegeben: Eine Menge P von N Punkten in der Ebene
- ▶ Gesucht: Ein Paar p_1, p_2 von Punkten aus P mit minimaler Distanz
- ▶ Naive Lösung: Berechne die Distanz zwischen allen Punktpaaren und wähle das Minimum: $O(n^2)$

▶ Alle nächsten Nachbarn

- ▶ Gegeben: Eine Menge P von N Punkten in der Ebene
- ▶ Gesucht: Für jeden Punkt $p_1 \in P$ ein nächster Nachbar $p_2 \in P \setminus \{p_1\}$, so dass $d(p_1, p_2) = \min_{p \in P \setminus \{p_1\}} d(p_1, p)$
- ▶ Naive Lösung: Paare jeden Punkt mit allen anderen und wähle das Paar mit der minimalen Distanz: $O(n^2)$

▶ Lösung im Eindimensionalen

- ▶ Sortiere alle Werte und betrachte dann nur noch aufeinander folgenden Werte
- ▶ $O(N \log N)$

Voronoi-Diagramm

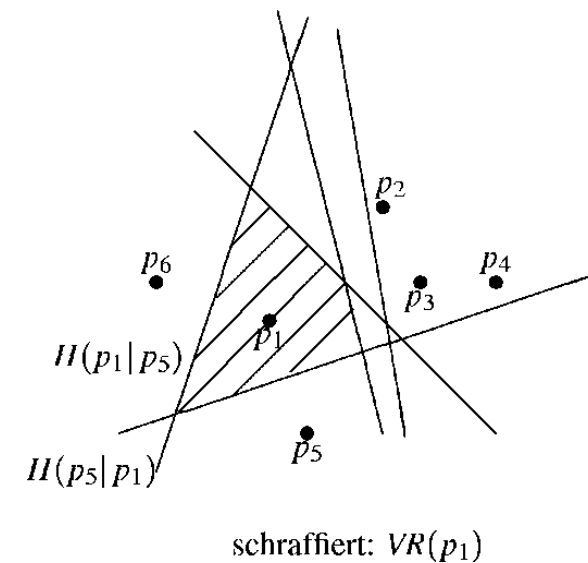
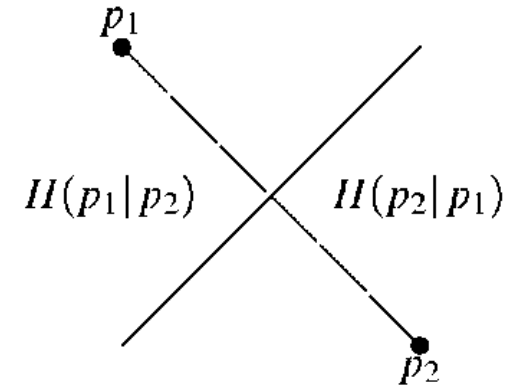
Definition

- Das Voronoi-Diagramm für eine Menge von Punkten in der Ebene teilt die Ebene in Gebiete gleicher nächster Nachbarn
- Besteht die Menge aus lediglich zwei Punkten, so wird die Einteilung gerade durch die Mittelsenkrechte auf der Verbindungsstrecke der beiden Punkte realisiert

Formal

- Der geometrische Ort aller Punkte, die näher an p_1 liegen als an p_2 , ist die Halbebene $H(p_1 | p_2)$
- Die Voronoi-Region $VR(p)$ enthält die geometrischen Orte aller Punkte der Ebene, die näher an $p \in P$ liegen als an jedem anderen Punkt aus P

$$VR(p) = \bigcap_{p' \in P \setminus \{p\}} H(p|p')$$



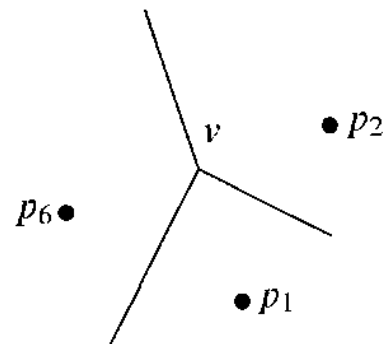
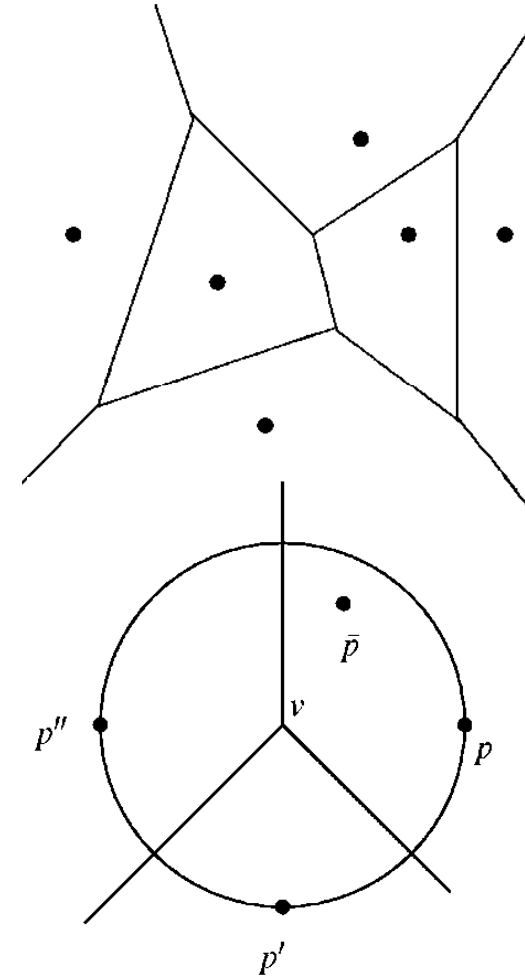
Voronoi-Diagramm – Eigenschaften

▶ **Definition**

- ▶ Ein Voronoi-Diagramm ist ein Graph, dessen Knoten *Voronoi-Knoten* und dessen Kanten *Voronoi-Kanten* genannt werden

▶ **Eigenschaften**

- ▶ Jeder Knoten v ist gleich weit von den Punkten p_i entfernt, deren Regionen $VR(p_i)$ an v angrenzen
- ▶ Unter der Annahme, dass keine vier Punkte in P auf einem Kreis liegen, liegen um jeden Knoten v drei Punkte in einem Abstand r . Innerhalb des Radius r kann es keinen weiteren Punkt \bar{p} geben

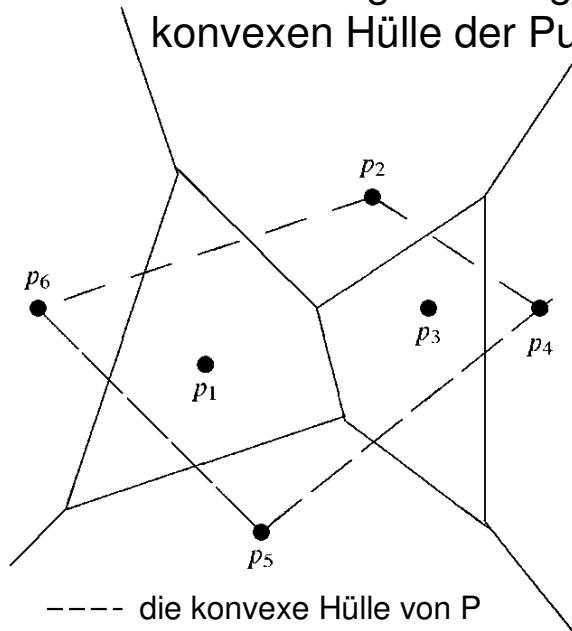


$$d(p_1, v) = d(p_2, v) = d(p_6, v)$$

Voronoi-Diagramm – Eigenschaften

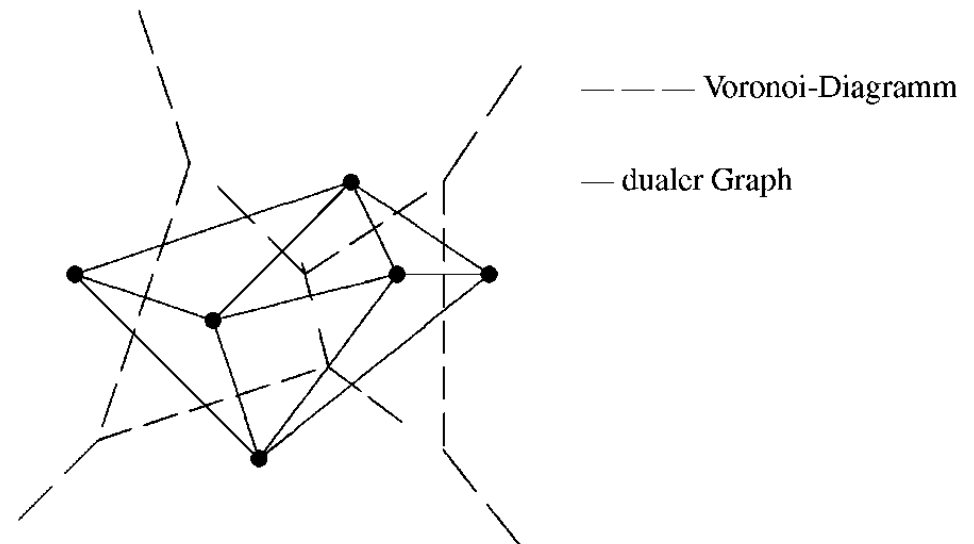
▶ Eigenschaften

- ▶ Einige Voronoi-Regionen sind beschränkt, andere unbeschränkt
- ▶ Die Punkte der unbeschränkten Voronoi-Regionen liegen auf der konvexen Hülle der Punktmenge

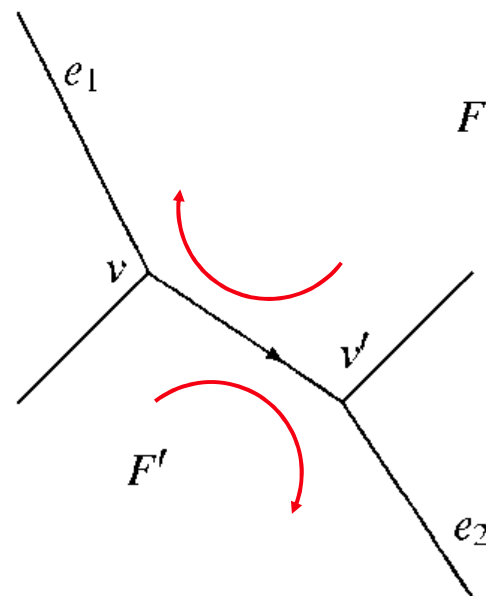


▶ Dualer Graph

- ▶ Ein Graph, in dem alle Punkte angrenzender Voronoi-Regionen verbunden sind
- ▶ Delaunay-Triangulation



Voronoi-Diagramm – Datenstruktur



Richtung der Kante $v v'$:
implizit, willkürlich
durch Abspeicherung
festgelegt

Kante

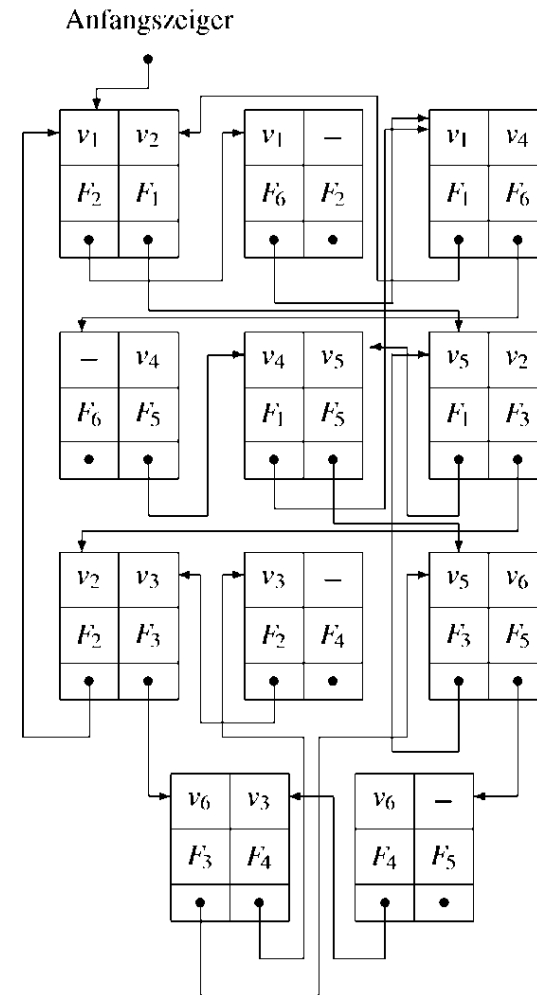
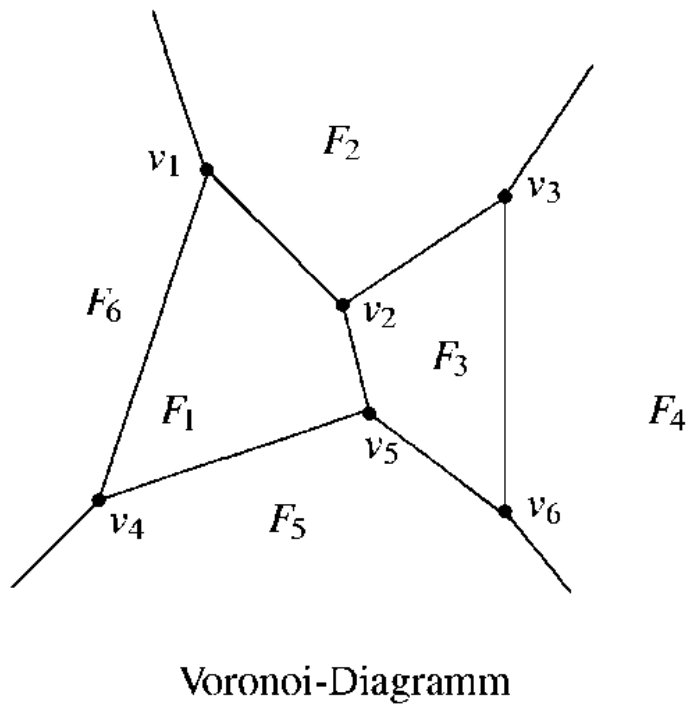
Anfangs-knoten: v	End-knoten v'
Fläche "links": F	Fläche "rechts": F'
nächste Kante von F bei v :	nächste Kante von F' bei v' :

↓
Kante e_1

↓
Kante e_2

legt implizit,
willkürlich
eine Rich-
tung fest

Voronoi-Diagramm – Datenstruktur





Voronoi-Diagramm – Datenstruktur

```
class Edge
{
    Node startNode,
        endNode;
    Surface leftSurface,
        rightSurface;
    Edge startEdge,
        endEdge;
}
```

```
void surround(Surface s, Edge e
              EdgeAction a)
{
    Edge e2 = e;
    do
    {
        a.action(e2);
        if(e2.leftSurface == s)
            e2 = e2.startEdge;
        else
            e2 = e2.endEdge;
    }
    while(e2 != e);
}
```

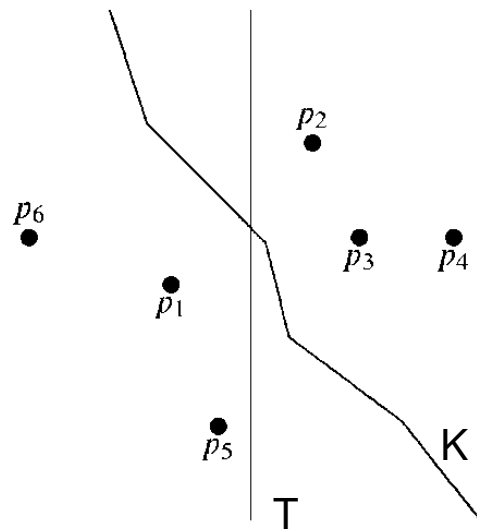
Voronoi-Diagramm – Konstruktion

▶ **Gegeben**

- ▶ Eine Menge P von N Punkten in der Ebene

▶ **Gesucht**

- ▶ Das Voronoi-Diagramm $VD(P)$ für P , als doppelt verkettete Kantenliste



$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$$

$$P_1 = \{p_1, p_5, p_6\}$$

$$P_2 = \{p_2, p_3, p_4\}$$

Kantenzug zwischen Voronoi-Regionen (von oben nach unten)
6,2; 1,2; 1,3; 5,3; 5,4.

▶ **Falls $|P| = 1$**

- ▶ $VD(P)$ ist die gesamte Ebene

▶ **Ansonsten**

▶ **Divide**

- ▶ Teile P durch eine vertikale Trennlinie T in zwei etwa gleich große Teilmengen P_1 (links von T) und P_2 (rechts von T)

▶ **Conquer**

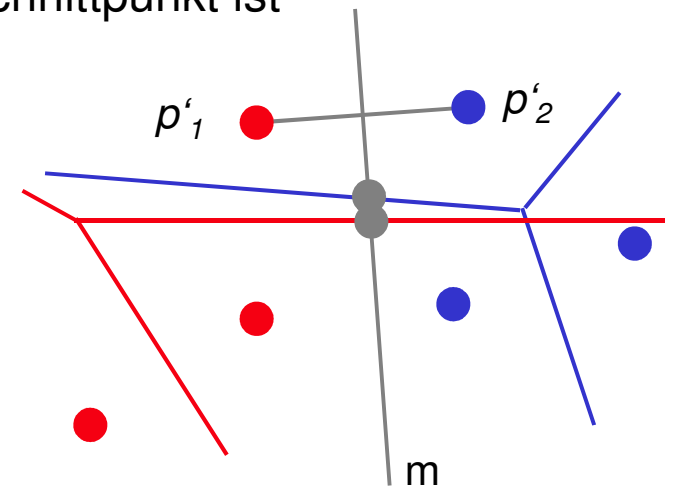
- ▶ Berechne $VD(P_1)$ und $VD(P_2)$ rekursiv

▶ **Merge**

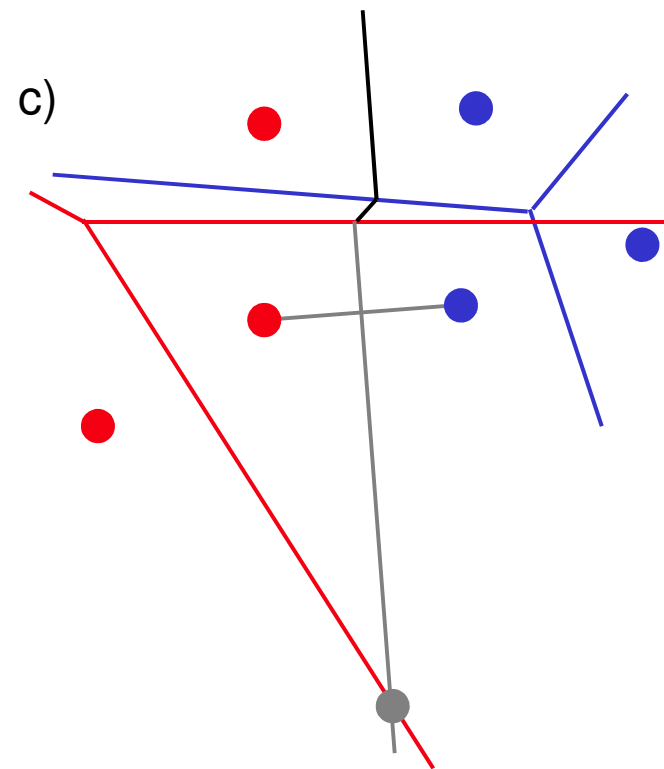
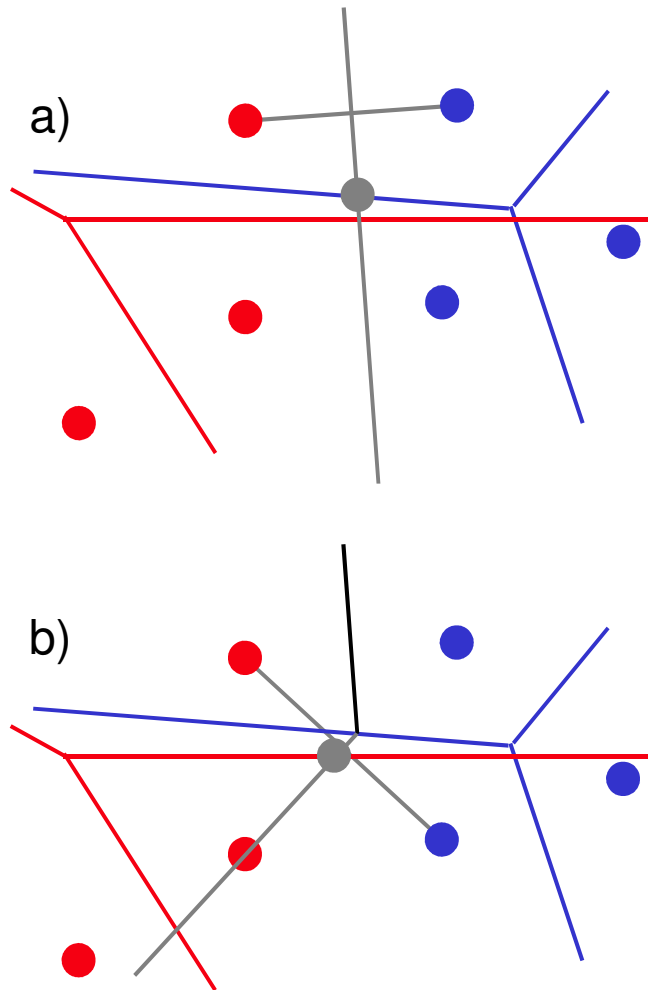
- ▶ Berechne den P_1 und P_2 trennenden Kantenzug K , der Teil von $VD(P)$ ist
- ▶ Schneide den rechts von K liegenden Teil von $VD(P_1)$ ab, sowie den links von K liegenden Teil von $VD(P_2)$
- ▶ Vereinige $VD(P_1)$, $VD(P_2)$ und K zu $VD(P)$

Voronoi-Diagramm – Kantenzug K

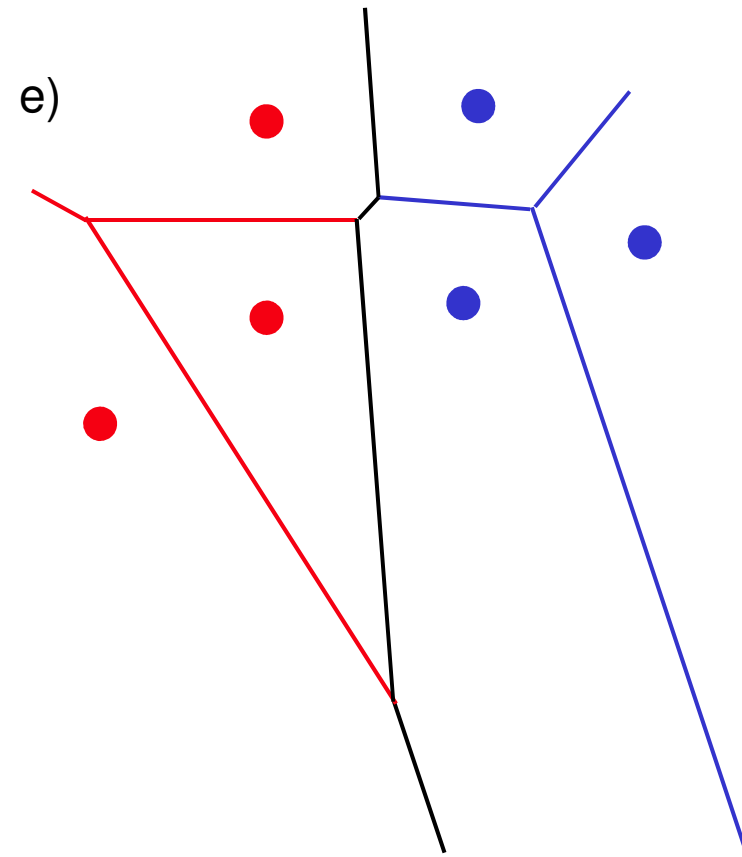
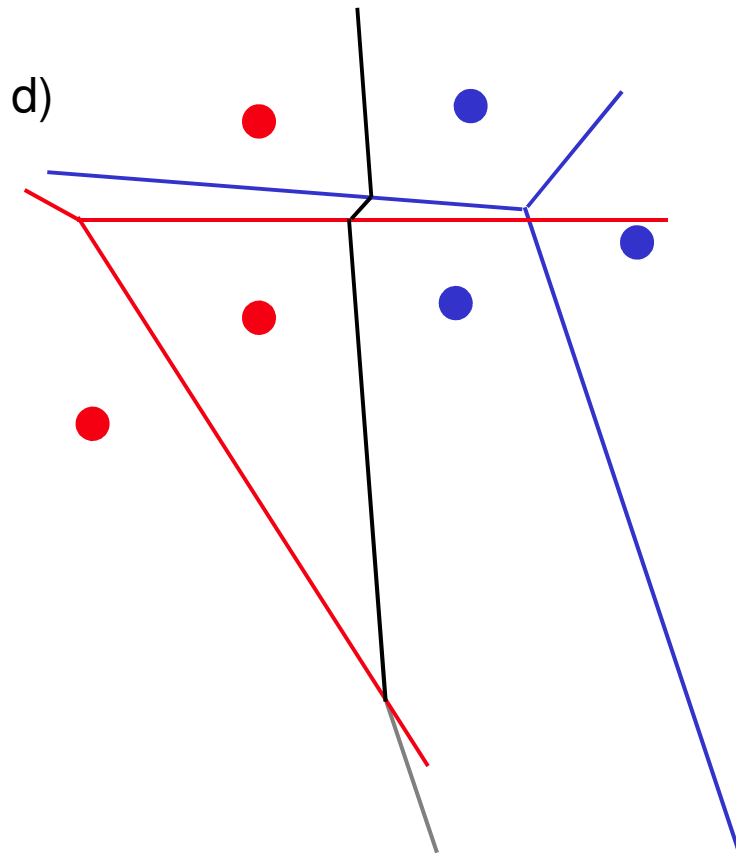
1. Setze $K = \emptyset$
2. Ermittle die beiden oberen Tangentialpunkte $p'_1 \in P_1$ und $p'_2 \in P_2$
3. Bestimme die Mittelsenkrechte m der Verbindungsstrecke von p'_1 und p'_2
4. Setze $k = (x, \infty)$, so dass k auf m liegt
5. Schneide m mit den beiden unteren unendlichen Kanten in $VR(p'_1)$ und $VR(p'_2)$
6. Wenn es keinen Schnitt gibt, füge $(k, (x, \infty))$ als unendliche Kante in K ein, wobei (x, ∞) auf m liegt. Gib K zurück
7. Ansonsten füge (k, s) in K ein, wobei s der oberer Schnittpunkt ist
8. Setze $k = s$
9. Der zum oberen Schnitt gehörige Punkt p'_i ($i = 1, 2$) wird durch seinen an dieselbe Kante angrenzenden Nachbarn p''_i ersetzt
10. Bestimme die neue Mittelsenkrechte m der Verbindungsstrecke von p'_1 und p'_2
11. Fahre mit 5. fort



Beispiel – Kantenzug K



Beispiel – Kantenzug K





Voronoi-Diagramm – Aufwand

▶ Aufwand

- ▶ Sortieren der Punkte nach x-Koordinaten: $O(N \log N)$
- ▶ Aufteilen der sortierten Punkte auf zwei Hälften: $O(1)$
- ▶ Bestimmung von K : $O(N)$
- ▶ Zusammenführen von $VD(P_1)$, $VD(P_2)$ und K : $O(N)$
- ▶ Rekursion: $2 \cdot O(N/2)$, $\log N$ mal $\rightarrow O(N \log N)$

▶ Dichtestes Punkte Paar

- ▶ Konstruiere das Voronoi-Diagramm $VD(P)$ der Punktmenge P : $O(N \log N)$
- ▶ Durchlaufe alle Kanten und ermittle das Minimum der Distanz benachbarter Punkte sowie das Punktepaar, das diese Distanz hat: $O(N)$

▶ Alle nächsten Nachbarn

- ▶ Konstruiere das Voronoi-Diagramm $VD(P)$ der Punktmenge P : $O(N \log N)$
- ▶ Durchlaufe die Kantenliste für $VD(P)$ so, dass der Reihe nach für jeden Punkt p alle Voronoi-Kanten von $VR(p)$ betrachtet werden. Dabei wird für jeden Punkt ein nächster Nachbar unter allen Punkten mit benachbarter Voronoi-Region ermittelt