Vorlesung Software-Reengineering

Prof. Dr. Rainer Koschke

Arbeitsgruppe Softwaretechnik
Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Bremen

Wintersemester 2005/06

Überblick I

1. Begriffsanalyse

Formale Begriffsanalyse

Formale Begriffsanalyse (Concept Analysis)

- Lernziele
  - Einführung von Begriffsanalyse
- Kontext
  - Begriffsanalyse ist Technik zur Analyse binärer Relationen
  - Begriffsanalyse wird vielseitig eingesetzt; Beispiele:
    - zur Lokalisierung von Merkmalen
    - zur Restrukturierung von Vererbungshierarchien

Von Objekten und Attributen zu Klassen

	four-legged	hair-covered	intelligent	marine	thumbed
cats	×	×			
dogs	×	×			
dolphins			×	×	
gibbons		×	×		×
humans			×		×
whales			×	×	

Von Objekten und Attributen zu Klassen

	four-legged	hair-covered	intelligent	marine	thumbed
cats	×	×			
dogs	×	×			
dolphins			×	×	
gibbons		×	×		×
humans			×		×
whales			×	×	

- Tabelle beschreibt Attribute von Objekten
- Wie sieht hierfür die Klassenhierarchie aus?
- Klasse = Menge aller Objekte, die alle gemeinsame Attribute haben
- Klasse korrespondiert mit maximal großen Rechtecken in der Tabelle (mit geeigneten Spalten- und Zeilenpermutationen

Begriffsanalyse (Concept Analysis) I

- Menge $\mathcal{O}$ von Objekten
- Menge $\mathcal{A}$ von Attributen
- Relation $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O} \times \mathcal{A}$
- das Tripel $K = (\mathcal{O}, \mathcal{A}, \mathcal{I})$ wird **formaler Kontext** genannt
- für eine Menge von Objekten $O \subseteq \mathcal{O}$ ist $\sigma(O)$ die Menge **gemeinsamer Attribute**:

$$\sigma(O) := \{a \in \mathcal{A} \quad | \quad (o, a) \in \mathcal{I} \text{ für alle } o \in O\}$$

- für eine Menge von Attributen $A \subseteq \mathcal{A}$ ist $\tau(A)$ die Menge der **gemeinsamen Objekte**:

$$\tau(A) := \{o \in \mathcal{O} \quad | \quad (o, a) \in \mathcal{I} \text{ für alle } a \in A\}$$

Begriffsanalyse (Concept Analysis) II

- Ein Paar aus Objekten und Attributen $b = (O, A)$ heißt **Begriff (Concept)**, genau dann, wenn

$$A = \sigma(O)$$

  und gleichzeitig

$$O = \tau(A)$$

- ein Begriff entspricht einem maximalen Rechteck in der Tabelle (modulo Zeilen- und Spaltenpermutationen)
- für einen Begriff $b = (O, A)$ ist
  - $O = \mathit{Umfang}(b)$ (extent) und
  - $A = \mathit{Inhalt}(b)$ (intent) des Begriffs b.

	four-legged	hair-covered	intelligent	marine	thumbed
cats	×	×			
dogs	×	×			
dolphins			×	×	
gibbons		×	×		×
humans			×		×
whales			×	×	

({dogs, cats}, {hair-covered, four-legged})
({humans, gibbons}, {thumbed, intelligent})
({gibbons}, {thumbed, intelligent hair-covered})
({whales, humans, gibbons, dolphins}, {intelligent})
({gibbons, dogs, cats}, {hair-covered})
({whales, dolphins}, {marine, intelligent})
({whales, humans, gibbons, dolphins, dogs, cats}, {})
({}, {thumbed, marine, intelligent, hair-covered, four-legged})

Partielle Ordnung der Begriffe

hierarchische Ordnung $\leq$: $b_1 = (O_1, A_1)$ und $b_2 = (O_2, A_2)$ zwei Begriffe des selben formalen Kontexts, dann ist

$$b_1 \leq b_2 \Leftrightarrow O_1 \subseteq O_2$$

oder, dual dazu,

$$b_1 \leq b_2 \Leftrightarrow A_2 \subseteq A_1$$

- $b_1 \leq b_2$: b_2 **Oberbegriff (Superconcept)** zu b_1
- b_1 als **Unterbegriff (Subconcept)** zu b_2

$\Rightarrow$ b_2 hat mindestens so viele Objekte wie b_1 bzw. b_1 hat mindestens so viele Attribute wie b_2

- ({gibbons}, {thumbed, intelligent hair-covered})
  $\leq$ ({humans, gibbons}, {thumbed, intelligent})
- Falls weder $b_1 \leq b_2$ noch $b_2 \leq b_1$, dann sind b_1 und b_2 **unvergleichbar**

Begriffsverband

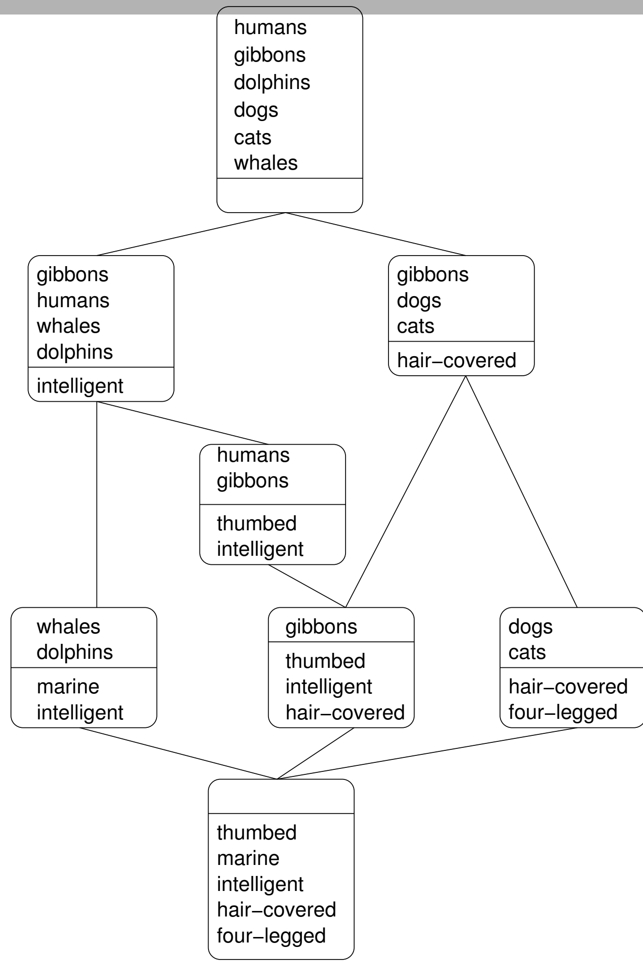
Menge $\mathcal{B}$ aller Begriffe eines Kontexts K zusammen mit Halbordnung $\leq$ bilden einen vollständigen Verband, den so genannten **Begriffsverband**:

$$\mathcal{B}(K) = \{(O, A) \in 2^{\mathcal{O}} \times 2^{\mathcal{A}} \quad | \quad A = \sigma(O) \text{ und } O = \tau(A)\}$$

Hasse-Diagramme

Hasse-Diagramme visualisieren die Relation $<$:

$b_1 < b_2 \Leftrightarrow b_1 \leq b_2$ und es gibt keinen Begriff $b(\neq b_1, b_2)$, mit $b_1 \leq b \leq b_2$



Infimum

Für zwei Begriffe b_1 und b_2

- **Gemeinsamer Unterbegriff Infimum** $\wedge$

$$(O_1, A_1) \wedge (O_2, A_2) = (O_1 \cap O_2, \sigma(O_1 \cap O_2))$$

Begriff, der die Menge der gemeinsamen Attribute zweier Objektmengen enthält

$$(\{human, gibbons\}, \{thumbed, intelligent\})$$
$$\wedge(\{gibbons, dogs, cats\}, \{hair\text{-}covered\})$$
$$= (\{human, gibbons\} \cap \{gibbons, dogs, cats\},$$
$$\sigma(\{human, gibbons\} \cap \{gibbons, dogs, cats\}))$$
$$= (\{gibbons\}, \{thumbed, intelligent, hair\text{-}covered\})$$

Supremum

Für zwei Begriffe b_1 und b_2

- **Gemeinsamer Oberbegriff Supremum ($\vee$)**

$$(O_1, A_1) \vee (O_2, A_2) = (\tau(A_1 \cap A_2), A_1 \cap A_2)$$

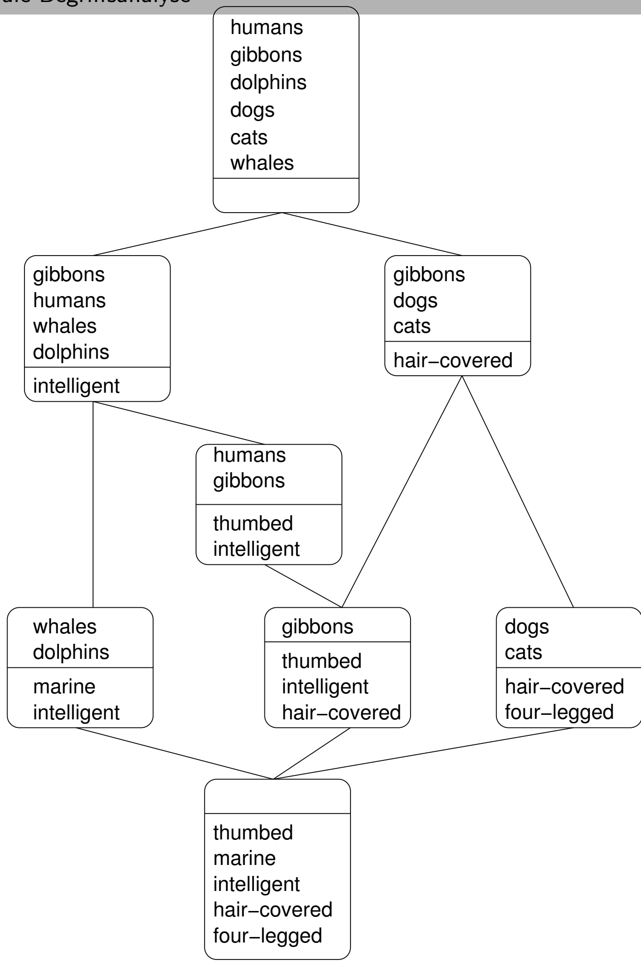
Begriff, der die Menge der gemeinsamen Objekte zweier Attributmengen umfasst

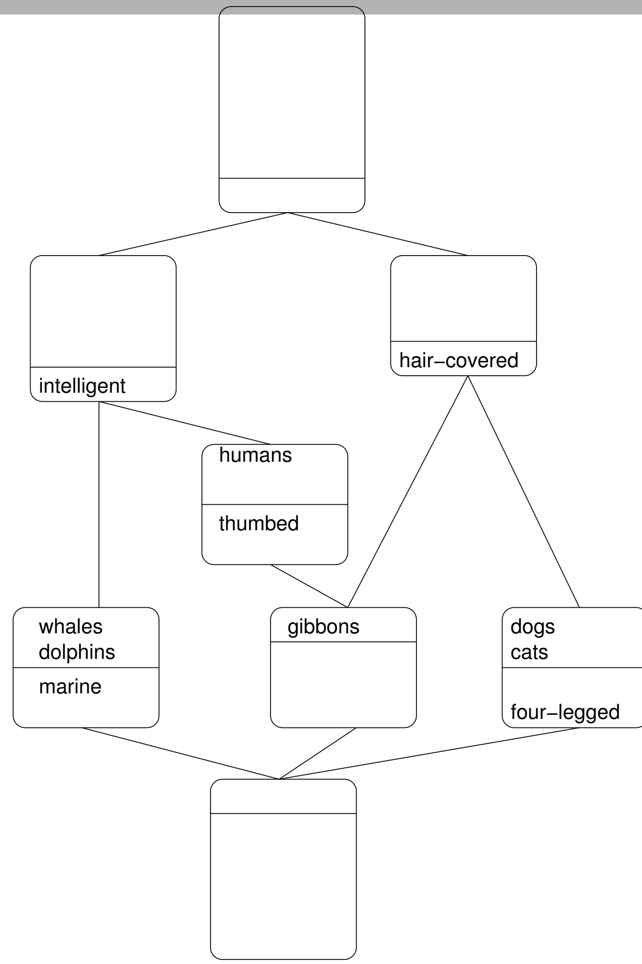
$$(\{gibbons\}, \{thumbed, intelligent, hair\text{-}covered\})$$
$$\vee(\{dogs, cats\}, \{four\text{-}legged, hair\text{-}covered\})$$
$$= (\tau(\{thumbed, intelligent, hair\text{-}covered\} \cap \{four\text{-}legged, hair\text{-}covered\}),$$
$$\{thumbed, intelligent, hair\text{-}covered\} \cap \{four\text{-}legged, hair\text{-}covered\})$$
$$= (\{gibbons, dogs, cats\}, \{hair\text{-}covered\})$$

Begriffsverband

Für die Operatoren $\wedge$ und $\vee$ gelten:

- Kommutativität: $x \vee y = y \vee x$ und $x \wedge y = y \wedge x$
- Assoziativität: $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ und $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
- Absorbtionsgesetze (Verschmelzungsgesetze): $x \vee (x \wedge y) = x$ und $x \wedge (x \vee y) = x$
- Größtes (Top, 1) und kleinstes (Bottom, 0) Element existieren





Verkürzter Verband

Eindeutig bestimmter Knoten im Begriffsverband, der mit

- Attribut a beschriftet wird:

$$\mu(a) = \bigvee \{ b \in \mathcal{B}(K) \quad | \quad a \in \mathit{Inhalt}(b) \}$$

  heißt **Attributbegriff** zu a ($\rightarrow$ größter Begriff mit a)

- Der Knoten, der mit dem Objekt o markiert wird:

$$\gamma(o) = \bigwedge \{ b \in \mathcal{B}(K) \quad | \quad o \in \mathit{Umfang}(b) \}$$

  und heißt **Objektbegriff** zu o ($\rightarrow$ kleinster Begriff mit o).

Von Objekten und Attributen zu Klassenhierarchien

- Erstelle Begriffsverband für Tabelle.
- Jedes Konzept ist prinzipiell eine Klasse.
- Die $\leq$-Relation stellt die Vererbung dar.
- Supremum: gemeinsame Oberklasse.
- Infimum: gemeinsame Unterklasse.

Weiterführende Literatur

Ganter und Wille (1996) haben ein Standardlehrbuch zur formalen Begriffsanalyse geschrieben, in dem viele weitere Konzepte vorgestellt werden.

Wiederholungs- und Vertiefungsfragen I

- Was muss alles festgelegt werden, um die formale Begriffsanalyse auf ein Problem anwenden zu können?
- Was ist ein formaler Kontext?
- Was ist ein Begriff?
- Was ist ein Begriffsverband?
- Gegeben sei die folgende Relation. Wie sieht der Begriffsverband dazu aus?
- Wie kann ein Begriffsverband interpretiert werden?

1 **Ganter und Wille 1996** Ganter, Bernhard ; Wille, Rudolf: Formale Begriffsanalyse: mathematische Grundlagen. Springer Verlag, 1996