

Struktur Vorlesung

- Kapitel 1: Einleitung
- Kapitel 2: Grundlagen
- Kapitel 3: Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen
- Kapitel 4: Tableau Algorithmen
- Kapitel 5: Komplexität
- Kapitel 6: ABoxen und Anfragebeantwortung
- Kapitel 7: Effiziente Beschreibungslogiken

Tableau-Algorithmen

Ziel des Kapitels

Automatisches Schlussfolgern spielt zentrale Rolle für BLen:

- ermöglicht die Entwicklung intelligenter Anwendungen
- die Ausdruckstärke von BLen ist stark darauf zugeschnitten

Wichtig für automatisches Schlussfolgern:

1. Entscheidbarkeit der relevanten Schlussfolgerungsprobleme
2. möglichst geringe Komplexität
3. Algorithmen, die sich in der Praxis performant verhalten

Dieses Kapitel: 1 + 3

Ziel des Kapitels

Wir konzentrieren uns auf Erfüllbarkeit (vergl. Lemma 2.8)

Dabei betrachten wir

- Die Beschreibungslogik *ALC*
- sowohl Konzepte ohne TBoxen als auch generelle TBoxen;

Tableau-Algorithmen

Entscheidbarkeit

Entscheidbarkeit

Kapitel 3:

In \mathcal{ALC} :

Wenn C erfüllbar bzgl. \mathcal{T} , dann haben C und \mathcal{T} Modell der Grösse 2^n .

Algorithmus für Erfüllbarkeit:

Gegeben C und \mathcal{T} so dass $|C| + |\mathcal{T}| = n$,

- erzeuge alle Interpretation \mathcal{I} mit $|\Delta|^{\mathcal{I}} \leq 2^n$
(es gibt “nur” 2^{2n^3+2} viele davon)

T4.0

- überprüfe, ob \mathcal{I} Modell von C und \mathcal{T}
(in Zeit polynomiell in \mathcal{I} , C und \mathcal{T})

\Rightarrow Erfüllbarkeit in \mathcal{ALC} bzgl. genereller TBoxen entscheidbar

Entscheidbarkeit

Lemma 4.1. Gegeben sei \mathcal{ALC} -Konzept C , endl. Interpretation \mathcal{I} und $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Man kann in polynomieller Zeit (in $|C| + |\Delta^{\mathcal{I}}|$) entscheiden ob $d \in C^{\mathcal{I}}$.

T4.1

Korollar 4.2. Gegeben sei C, \mathcal{T} in \mathcal{ALC} und endl. Interpretation \mathcal{I} . Man kann in polynomieller Zeit (in $|C| + |\mathcal{T}| + |\Delta^{\mathcal{I}}|$) entscheiden ob \mathcal{I} ein Modell von C und \mathcal{T} ist.

(Model checking in Polynomialzeit)

Entscheidbarkeit

Komplexität: 2-ExpTime

2-exponentiell viele Interpretationen müssen geprüft werden
jede Prüfung braucht polynomielle Zeit.

Dieser Ansatz ist kaum tauglich für die Praxis:

- Die Komplexität ist höher als nötig
- Das Aufzählen aller Modelle ist nicht praktikabel:
zu wenig zielorientiert uns best-case 2-exponentiell!

Praktikable Algorithmen

In der Praxis haben sich hauptsächlich als effizient herausgestellt:

- Tableau-Algorithmen wie in RACER, FaCT++, Pellet, Hermit
- Resolutionsverfahren wie in KAON2

Tableau Algorithmen:

- werden heute in den meisten BL-Systemen eingesetzt
- wurden ursprünglich für FO und andere Logiken entwickelt
- versuchen, ein (Baum)modell für Eingabe zu konstruieren
- basieren auf der Anwendung von Regeln.

Tableau-Algorithmen

ALC ohne TBoxen

Tableau Algorithmus

Ziel:

Entwicklung eines Tableau Algorithmus für Erfüllbarkeit
von *ALC* Konzepten (ohne TBoxen)

Negationsnormalform

Definition 4.3. (Negationsnormalform)

Konzept ist in *Negationsnormalform (NNF)* gdw. Negation nur auf atomare Konzepte angewendet wird.

Lemma 4.4.

Jedes Konzept kann in Linearzeit in ein äquivalentes Konzept in NNF umgewandelt werden.

T4.2

Wir nehmen an, dass Eingabekonzept C_0 in NNF ist.

I-Baum

Zugrundeliegende Datenstruktur repräsentiert (partielles) Baummodell

Definition 4.5 (I-Baum)

I-Baum für C_0 ist knoten- und kantenbeschrifteter Baum (V, E, \mathcal{L}) mit

- V Knotenmenge;
- $E \subseteq V \times \mathbf{N}_R \times V$ Menge beschrifteter Kanten;
- $\mathcal{L} : V \rightarrow 2^{\text{sub}(C_0)}$ Knotenbeschriftung

T4.3

Tableau Algorithmus

Tableau Algorithmus berechnet Sequenz

$$M_0, M_1, \dots$$

von Mengen von I-Bäumen.

$M_0 = \{B_{ini}\}$ mit B_{ini} *initialer I-Baum* für C_0 :

$$V := \{v_{ini}\}$$

$$E := \emptyset$$

$$\mathcal{L}(v_{ini}) := \{C_0\}$$

M_{i+1} aus M_i durch Anwendung von Tableau Regel

(Transformiert I-Baum in einen oder mehrere neue I-Bäume)

Tableau Regeln

Sei (V, E, \mathcal{L}) I-Baum.

\sqcap -Regel:

- wähle $v \in V$ und $C \sqcap D \in \mathcal{L}(v)$ so dass $\{C, D\} \not\subseteq \mathcal{L}(v)$
- erweitere $\mathcal{L}(v)$ um C und D

\sqcup -Regel:

- wähle $v \in V$ und $C \sqcup D \in \mathcal{L}(v)$ so dass $\{C, D\} \cap \mathcal{L}(v) = \emptyset$
- erweitere $\mathcal{L}(v)$ um C oder um D (ergibt zwei I-Bäume)

Tableau Regeln

\exists -Regel:

- wähle $v \in V$ und $\exists r.C \in \mathcal{L}(v)$ so dass
es kein $v' \in V$ gibt mit $(v, r, v') \in E$ und $C \in \mathcal{L}(v')$
- erweitere V um neuen Knoten v' und E um (v, r, v') ,
setze $\mathcal{L}(v') = \{C\}$

\forall -Regel:

- wähle $v, v' \in V$ und $\forall r.C \in \mathcal{L}(v)$ so dass
 $(v, r, v') \in E$ und $C \notin \mathcal{L}(v')$
- erweitere $\mathcal{L}(v')$ um C

Tableau Algorithmus

Berechnung von M_{i+1} aus M_i :

- Auswahl eines $B \in M_i$ und Anwendung einer der 4 Regeln
- Regelanwendung: ersetzen von B durch neuen I-Baum bzw. zwei neue I-Bäume (\sqcup -Regel)

Intuition: Regeln machen implizites Wissen explizit.

I-Baum ist *vollständig*, wenn keine Regel darauf anwendbar ist.

Ergebnis

Algorithmus stoppt, wenn keine Regel mehr anwendbar ist.

Rückgabe von

- “erfüllbar” wenn I-Baum gefunden wurde, der keinen *offensichtlichen Widerspruch* enthält:

$$\{A, \neg A\} \subseteq \mathcal{L}(v) \text{ für ein } v \in V, A \in \mathbf{N}_c$$

- “unerfüllbar” sonst

T4.4

Terminierung

Intuitiv: $\text{rd}(C)$ ist Schachtelungstiefe von \exists/\forall -Konstruktoren in C ,

Rollentiefe $\text{rd}(C)$ von Konzepten $C \in \text{sub}(C_0)$ induktiv definiert:

- $\text{rd}(A) = \text{rd}(\neg A) = 0$;
- $\text{rd}(C \sqcap D) = \text{rd}(C \sqcup D) = \max(\text{rd}(C), \text{rd}(D))$;
- $\text{rd}(\exists r.C) = \text{rd}(\forall r.C) = 1 + \text{rd}(C)$.

Lemma 4.6. Für alle $C \in \text{sub}(C_0)$ gilt $\text{rd}(C) \leq |C|$.

Terminierung

Proposition 4.7 (Terminierung)

Der Tableau Algorithmus stoppt nach endlicher Zeit.

T4.5

Multimengen

Multimengen sind Mengen, in denen Elemente mehrfach vorkommen dürfen:

$$\{a, a, b, b, b\}, \{1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6\}, \{\emptyset, \emptyset, \{\emptyset, \emptyset\}\}$$

Formal: Multimenge über Menge S ist Abbildung

$$M : S \rightarrow \mathbb{N}$$

die die Anzahl des Vorkommens der Elemente beschreibt

Die meisten Begriffe übertragen sich von Mengen auf Multimengen:

- Leere Menge \emptyset : $s \mapsto 0$ für alle $s \in S$
- Vereinigung: $(M_1 \cup M_2)(s) := M_1(s) + M_2(s)$
- Element: $s \in M$ gdw. $M(s) > 0$
- Differenz: $(M_1 \setminus M_2)(s) = \begin{cases} M_1(s) - M_2(s) & \text{wenn } M_1(s) \geq M_2(s) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Multimengen

Sei S endlich, $MM(S)$ die Menge aller Multimengen über S

Gegeben partielle Ordnung $(S, <)$ ist *Multimengenerweiterung* $(MM(S), <_{mul})$ definiert als:

$M_2 <_{mul} M_1$ gdw. $\exists X, Y \in MM(S)$ so dass:

- $\emptyset \neq X \subseteq M_1$;
- $M_2 = (M_1 \setminus X) \cup Y$;
- $\forall y \in Y \exists x \in X : x > y$.

Also: M_2 erhält man aus M_1 indem man einige Elemente entfernt und durch endlich viele kleinere ersetzt.

$$\{3, 1\} >_{mul} \{2, 2, 2\} >_{mul} \{2, 2\} >_{mul} \{2, 1, 1, 1\}$$

Multimengen

Theorem.

Wenn $(S, <)$ fundiert ist, dann auch $(MM(S), <_{\text{mul}})$.

Korrektheit und Vollständigkeit

Proposition 4.10 (Korrektheit)

Wenn der Algorithmus “erfüllbar” zurückgibt, so ist C_0 erfüllbar. **T4.6**

Korrektheit und Vollständigkeit

Definition 4.8 (Realisierbarkeit)

Sei $B = (V, E, \mathcal{L})$ ein I-Baum. Interpretation \mathcal{I} *realisiert* B gdw. es gibt Funktion

$$\pi : V \rightarrow \Delta^{\mathcal{I}}$$

so dass

- $(v, r, v') \in E$ impliziert $(\pi(v), \pi(v')) \in r^{\mathcal{I}}$;
- $C \in \mathcal{L}(v)$ impliziert $\pi(v) \in C^{\mathcal{I}}$.

T4.7

B ist *realisierbar* wenn es Interpretation \mathcal{I} gibt, die B realisiert.

Menge M von I-Bäumen ist *realisierbar* gdw. ein $B \in M$ realisierbar.

Beachte: realisierbarer I-Baum enthält keinen offensichtlichen Widerspruch!

Korrektheit und Vollständigkeit

Proposition 4.11 (Vollständigkeit)

Wenn C_0 erfüllbar, so gibt der Algorithmus “erfüllbar” zurück.

T4.8

Komplexitätsanalyse

Beobachtung:

die I-Bäume können höchstens exponentiell gross werden
(Beweis von Proposition 4.7)

Dieser Worst Case kann tatsächlich eintreffen:

Erfüllbarkeitstest von

$$\prod_{i < n} \forall r^i. (\exists r. B \sqcap \exists r. \neg B) \quad \forall r^i. C = \underbrace{\forall r. \dots \forall r. C}_{i \text{ mal}}$$

generiert Baum der Größe 2^n .

T4.9

Also: exponentieller Zeit- und Platzverbrauch (sogar 2-exponentiell!).

Praktikabilität

Naive Implementierung ist nicht effizient.

Implementierungsgrundlagen:

- Es wird nur ein Baum zur Zeit generiert, keine Menge
- bei der \sqcup -Regel muss man sich also entscheiden (Heuristik)
ggf. Entscheidung revidieren (Backtracking)
- es wird nur ein Teil des Baumes (Pfad) im Speicher gehalten

Darüber hinaus gibt es zahlreiche effektive Optimierungstechniken.

Optimierungen: Backjumping

Beispiel für Optimierung: Backjumping

Form von dependenzbasiertem Backtracking:

- führe Buch über die “Herkunft” von Knotenbeschriftungen und Kanten mittels Dependenzmenge
- wenn Backtracking nötig (offens. Widerspruch), springe direkt zu einer der Ursachen des Widerspruches zurück.

Hat dramatische Effekte in der Praxis.

T4.10

Tableau-Algorithmen

ALC mit generellen TBoxen

Tableau-Algorithmus

Ziel:

Entwicklung eines Tableau Algorithmus für Erfüllbarkeit
in \mathcal{ALC} bzgl. genereller TBoxen

Jede generelle TBox \mathcal{T} ist äquivalent zu einer TBox der Form $\{\top \sqsubseteq C_{\mathcal{T}}\}$:

$$\text{setze } C_{\mathcal{T}} := \bigsqcap_{C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}} C \rightarrow D. \quad \text{T4.11}$$

Wir nehmen an, dass

- Eingabe C_0 in NNF;
- Eingabe \mathcal{T} hat Form $\{\top \sqsubseteq C_{\mathcal{T}}\}$ mit $C_{\mathcal{T}}$ in NNF.

Tableau-Algorithmus

Modifiziere vorigen Algorithmus durch Hinzufügen folgender Regel:

TBox-Regel:

- wähle $v \in V$ so dass $C_{\mathcal{T}} \notin \mathcal{L}(v)$
- erweitere $\mathcal{L}(v)$ um $C_{\mathcal{T}}$

Problem: Algorithmus terminiert nicht!

T4.12

Blockieren

Problem:

Die Tiefe von Baummodellen kann unendlich sein!

Lösung:

Konstruiere nur endliches Anfangsstück eines Baummodelles,
mittels dessen sich die Existenz eines vollst. Modelles entscheiden lässt.

Dazu müssen wir die Anwendung der \exists -Regel einschränken.

Blockieren

Definition 4.12. (Blockiert)

Sei (V, E, \mathcal{L}) ein I-Baum und $u, v \in V$.

Dann ist v *direkt blockiert von u* wenn

1. u Vorgänger von v in B ist und
2. $\mathcal{L}(v) \subseteq \mathcal{L}(u)$

v ist *blockiert* wenn v direkt blockiert ist oder einen direkt blockierten Vorgänger hat.

T4.13

"Vorgänger" meint nicht unbedingt direkten Vorgänger!

Blockieren

Neue \exists -Regel:

\exists' -Regel:

- wähle $v \in V$ und $\exists r.C \in \mathcal{L}(v)$ so dass
 v nicht blockiert ist und
es kein $v' \in V$ gibt mit $(v, r, v') \in E$ und $C \in \mathcal{L}(v')$
- erweitere V um neuen Knoten v' und E um (v, r, v') ,
setze $\mathcal{L}(v') = \{C\}$

T4.14

Tableau-Algorithmus

Proposition 4.14 (Vollständigkeit)

Wenn C_0 erfüllbar bzgl. \mathcal{T} , so gibt der Algorithmus “erfüllbar” zurück.

Beweis wie ohne TBoxen:

alle M_0, \dots, M_n sind realisierbar bzgl. \mathcal{T} (Induktion),
also enthält M_n Baum ohne offensichtlichen Widerspruch.

Unterschiede:

- Realisierbarkeit wird bzgl. Modellen von \mathcal{T} definiert;
- neuer Fall für TBox-Regel.

Tableau-Algorithmus

Es bleibt also zu zeigen:

Proposition 4.15 (Korrektheit)

Wenn der Algorithmus “erfüllbar” zurückgibt, so ist C_0 erfüllbar bzgl. \mathcal{T} .

T4.15

Proposition 4.16 (Terminierung)

Der Tableau Algorithmus stoppt nach endlicher Zeit.

T4.16

Komplexitätsanalyse

Beobachtung:

die I-Bäume können höchstens doppelt exponentiell gross werden
(Beweis von Proposition 4.15)

Dieser Worst Case kann tatsächlich eintreffen:

Lemma 4.17.

Es gibt Eingabe C_0, \mathcal{T} , für die der Tableau Algorithmus einen Baum von doppelt exponentieller Größe generiert.

T4.17

Also: 2-exponentieller Zeit- und Platzverbrauch (sogar 3-exponentiell!).

Bemerkung zur TBox-Regel

Generelle TBoxen führen zu Backtracking:

Normalisierung \mathcal{T} zu $\{\top \sqsubseteq \bigsqcup_{C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}} C \rightarrow D\}$, also

$$\{\top \sqsubseteq \bigsqcup_{C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}} \neg C \sqcup D\}$$

\sqcup -Regel für *jede* Konzeptinklusion auf *jeden* Knoten angewendet!

Für effiziente Implementierung braucht man Optimierungstechniken, die die Disjunktionen soweit möglich eliminieren (“Absorption”).

Tableau-Algorithmen

Erweiterungen von ALC

Erweiterungen

Algorithmus kann auf *ALCT*, *ALCQ* und *ALCQT* erweitert werden.

Das ist teilweise subtiler als erwartet, z.B.:

- *ALCT*

Offensichtlich: Hinzufügen von Regeln für $\exists r^-.C$ und $\forall r^-.C$

Weniger offensichtlich: Blockierungsbedingung muss verschärft werden,
sonst ist Algorithmus nicht korrekt!

Für *ALCQT* ist noch aufwendigere Blockierungsbedingung nötig.