Prof. Carsten Lutz/Dr. Stefan Göller　　　　Sommersemester 2013

Theoretische Informatik 2

Gewertete Aufgaben, Blatt 2

Abgabe:Bis 6.5.13 ins Postfach Ihrer Tutorin/ Ihres Tutors
Besprechung: KW 19

---

1. (25%=10%+10%+5%) Für zwei Typ-0-Grammatiken $G_1 = (N_1, \Sigma, P_1, S_1)$ und $G_2 = (N_2, \Sigma, P_2, S_2)$ über einem gemeinsamen Terminalalphabet und mit $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ und $S \notin (N_1 \cup N_2)$ definieren wir die Grammatik

$$G_{1,2} = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}, S).$$

a) Geben Sie konkrete Grammatiken G_1 und G_2 an, so dass $G_{1,2}$ definiert ist und $L(G_{1,2}) \neq L(G_1) \cup L(G_2)$ gilt.

b) Eine Typ-0-Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ heißt *normalisiert*, falls für alle $(u \to v) \in P$ gilt, entweder

- $u \in N^+$ und $v \in N^*$ oder
- $u \in N$ und $v \in \Sigma$.

Zeigen Sie, dass es zu jeder Typ-0-Grammatik G eine normalisierte Typ-0-Grammatik G' gibt mit $L(G') = L(G)$.

c) Wir wollen nun beweisen, dass die Typ-0-Sprachen unter Vereinigung abgeschlossen sind. Begründen Sie daher kurz, warum $L(G_{1,2}) = L(G_1) \cup L(G_2)$ gilt, falls G_1 und G_2 normalisiert sind.

2. (25%) Gegeben sei die NTM $\mathcal{A} = (\{q_0, q_1\}, \{a\}, \{a, \not{b}\}, q_0, \Delta, \{q_1\})$, wobei Δ aus folgenden Tupeln besteht:

$$\begin{array}{lllll} (q_0, & a, & \not{b}, & r, & q_1), \\ (q_1, & a, & \not{b}, & r, & q_0), \\ (q_0, & \not{b}, & a, & n, & q_0) \end{array}$$

Das Verfahren im Beweis von Satz 12.1 liefert für $\mathcal{A}$ eine konkrete Grammatik G mit $L(G) = L(\mathcal{A})$. Geben Sie die Ableitung von G für das Wort $aaa \in L(G)$ an.

3. (25%=5 × 5%) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Geben Sie eine kurze Begründung an.

a) Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \Delta, F)$ eine NTM und sei $w \in L(\mathcal{A})$. Dann ist jede mit $\not{b}q_0w\not{b}$ beginnende Berechnung von $\mathcal{A}$ endlich.

b) Es gibt eine NTM $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \Delta, F)$ und eine Eingabe $w \in \Sigma^*$ von $\mathcal{A}$, so dass für unendlich viele Konfigurationen k gilt $\not b q_0 w \not b \vdash^*_{\mathcal{A}} k$.

c) Es gibt einen LBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \Delta, F)$ und eine Eingabe $w \in \Sigma^*$ von $\mathcal{A}$, so dass für unendlich viele Konfigurationen k gilt $\not c q_0 w \$ \vdash^*_{\mathcal{A}} k$.

d) Wenn L von einem Kellerautomaten erkannt werden kann, so auch von einem LBA.

e) Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \Delta, F)$ ein LBA und $w \in \Sigma^*$ eine Eingabe von $\mathcal{A}$. Dann ist jede mit $\not c q_0 w \$$ beginnende Berechnung von $\mathcal{A}$ endlich.

4. (25%) Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ bezeichne

$$\mathsf{HALB}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists w' \in \Sigma^* : |w| = |w'| \text{ und } ww' \in L\}.$$

Zeigen Sie, dass die Typ-1 Sprachen unter der Operation HALB abgeschlossen sind, dass also für alle Sprachen L gilt:

$$L \text{ ist eine Typ-1 Sprache} \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{HALB}(L) \text{ ist eine Typ-1 Sprache.}$$

Hinweis: Es kann dabei sinnvoll sein, das einzige Band, das einem LBA zur Verfügung steht, in mehrere Spuren zu unterteilen, um sich “mehr Platz zu schaffen”.