

## 2. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Beschreibungslogik“

### Aufgabe 1: 20%

Beweise die offenen Punkte von Lemma 2.8: für alle generellen TBoxen  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{ALC}$ -Konzepte  $C, D$  gilt:

- (a)  $C$  ist erfüllbar bzgl.  $\mathcal{T}$  gdw.  $\mathcal{T} \not\models C \equiv \perp$
- (b)  $\mathcal{T} \models C \equiv D$  gdw.  $\mathcal{T} \models \top \sqsubseteq C \leftrightarrow D$

Use the definitions, luke!

### Aufgabe 2: 30%

Für jedes der Interpretationspaare  $\mathcal{I}_i, \mathcal{J}_i$  auf der gegenüberliegenden Seite bestimme ob es ein  $\mathcal{ALC}$ -Konzept  $C$  gibt mit  $d \in C^{\mathcal{I}_i}$  und  $e \notin C^{\mathcal{J}_i}$  oder umgekehrt. Wenn dies der Fall ist, gib das Konzept  $C$  explizit an. Wenn nicht, gib eine Bisimulation an, die zeigt, dass  $(\mathcal{I}_i, d) \sim (\mathcal{J}_i, e)$ .

### Aufgabe 3: 30%

Beweise oder widerlege, dass für alle Interpretationen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{J}$  gilt:

- (a) wenn  $\rho_1$  und  $\rho_2$  Bisimulationen zwischen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{J}$  sind, dann auch  $\rho_1 \cup \rho_2$
- (b) wenn  $\rho_1$  und  $\rho_2$  Bisimulationen zwischen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{J}$  sind, dann auch  $\rho_1 \cap \rho_2$
- (c) wenn  $\rho_1$  Bisimulation zwischen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{J}$  ist und  $\rho_2$  Bisimulation zwischen  $\mathcal{J}$  und  $\mathcal{K}$ , dann ist  $\rho_1 \circ \rho_2 = \{(d, e) \mid \exists f : d \rho_1 f \text{ und } f \rho_2 e\}$  Bisimulation zwischen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{K}$ .

### Aufgabe 4: 20%

Beweise, dass die folgenden Formeln der Prädikatenlogik nicht in  $\mathcal{ALC}$  ausdrückbar sind:

- (a)  $\exists y \exists z (r(x, y) \wedge r(x, z) \wedge r(y, z))$
- (b)  $\forall y (A(y) \rightarrow r(x, y))$

Verwende Bisimulation und verfähre wie im Beweis von Theorem 3.3.

### Aufgabe 5: 20% (Zusatzaufgabe)

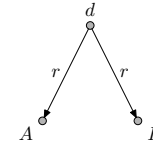
Betrachte folgenden Algorithmus zum Berechnen einer Bisimulation zwischen gegebenen Interpretationen  $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ :

- Starte mit der Relation  $R = \{(d, e) \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{J}} \mid d \in A^{\mathcal{I}} \text{ gdw. } e \in A^{\mathcal{J}} \text{ für alle Konzeptnamen } A\}$ .
- Wiederhole erschöpfend:
  - wenn  $(d, e) \in R$ ,  $(d, d') \in r^{\mathcal{I}}$  und es kein  $(e, e') \in r^{\mathcal{J}}$  gibt mit  $(d', e') \in R$ , dann entferne  $(d, e)$  aus  $R$
  - wenn  $(d, e) \in R$ ,  $(e, e') \in r^{\mathcal{J}}$  und es kein  $(d, d') \in r^{\mathcal{I}}$  gibt mit  $(d', e') \in R$ , dann entferne  $(d, e)$  aus  $R$ .

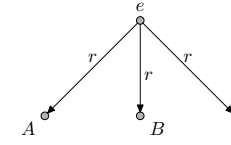
Zeige folgendes:

- (a)  $R$  ist eine Bisimulation;
- (b) Für jede Bisimulation  $B$  zwischen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{J}$  gilt  $B \subseteq R$  ( $R$  ist die größte Bisimulation zwischen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{J}$ ).

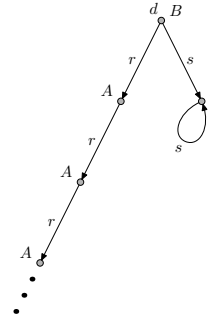
$\mathcal{I}_1$ :



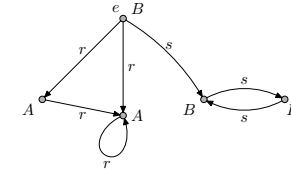
$\mathcal{J}_1$ :



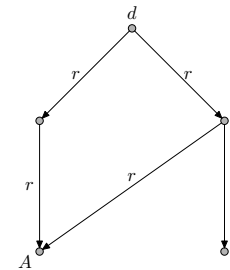
$\mathcal{I}_2$ :



$\mathcal{J}_2$ :



$\mathcal{I}_3$ :



$\mathcal{J}_3$ :

