Beschreibungslogik

Übungsblatt 4

Abgabe am 1. 6. zu Beginn der Übung

1. (35 %) Verwende den Tableau-Algorithmus für $\mathcal{ALC}$ mit TBoxen aus der Vorlesung um zu entscheiden, ob

a) $C_0 = \exists r.(\exists r.A \sqcup \exists r.B)$ erfüllbar bzgl. $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq \forall r.(\neg A \sqcap \neg B)\}$ ist;

b) $C_0 = A \sqcap B'$ erfüllbar bzgl. $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq \exists r.A \sqcap \exists s.A \sqcap \forall r.(B \sqcap \forall r.B')\}$ ist;

c) die Subsumtion $\mathcal{T} \models \mathsf{Student} \sqsubseteq \mathsf{Schlau}$ gilt,
wobei $\mathcal{T} = \{\mathsf{Student} \sqsubseteq \exists \mathsf{löst.Aufgabe},\ \exists \mathsf{löst}.\top \sqsubseteq \mathsf{Schlau}\}$.

Sobald in einem I-Baum ein offensichtlicher Widerspruch auftritt, brauchst Du auf diesen Baum keine weiteren Tableau-Regeln anzuwenden. Versuche deshalb möglichst zeitig offensichtliche Widersprüche zu erzeugen, sofern das möglich ist.

2. (20 %) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründe kurz.

a) Der Tableau-Algorithmus für $\mathcal{ALC}$ ohne TBoxen terminiert immer.

b) Der Tableau-Algorithmus für $\mathcal{ALC}$ mit TBoxen terminiert für manche Eingaben nicht.

c) Der Tableau-Algorithmus für $\mathcal{ALC}$ verhält sich auf jeder Eingabe $(C_0, \mathcal{T})$ genauso wie der Algorithmus für Typelimination: entweder geben beide „erfüllbar“ aus oder beide „unerfüllbar“.

d) Der Tableau-Algorithmus für $\mathcal{ALC}$ hat im Worst Case dieselbe Laufzeit wie Typelimination.

e) Wenn ein Typ t schlecht in Γ ist, dann gibt es keine Interpretation $\mathcal{I}$, so dass $\{t_\mathcal{I}(d) \mid d \in \Delta^\mathcal{I}\} \subseteq \Gamma$ und $t = t_\mathcal{I}(d)$ für ein $d \in \Delta^\mathcal{I}$.

3. (25 %) Verwende Typelimination um zu entscheiden, ob

a) $C_0 = \exists r.\neg A$ erfüllbar bzgl. $\mathcal{T} = \{\forall r.A \sqsubseteq A, A \sqsubseteq \bot, \forall r.A \sqsubseteq \exists r.A\}$ ist;

b) $C_0 = \forall r.\forall r.A$ erfüllbar bzgl. $\mathcal{T} = \{\neg A \sqsubseteq B, A \sqsubseteq \neg B, \forall r.A \sqsubseteq \bot\}$ ist.

Gib jeweils die konstruierte Folge $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots$ an. Im Fall von Erfüllbarkeit gib das Modell aus dem Beweis von Proposition 5.5 an. Beim Wandeln der TBox in Normalform kannst Du Inklusionen der Form $C \sqsubseteq \bot$ direkt in $\mathsf{NNF}(\neg C)$ wandeln anstatt in $\mathsf{NNF}(\neg C) \sqcup \bot$.

4. (20 %) Betrachte folgende eingeschränkte Variante des Erfüllbarkeitsproblems für $\mathcal{ALC}$ ohne TBoxen:

> Gegeben ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C, in dem *keine* Quantoren ($\exists, \forall$) vorkommen, entscheide ob C erfüllbar ist.

Zeige, dass dieses Problem in NP ist, indem Du eine Reduktion zum Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SAT) angibst. Begründe, dass Deine Reduktionsfunktion die Anforderungen an eine Polynomialzeitreduktion erfüllt.

Hinweis: Wenn Du Deine Kenntnisse über (Polynomialzeit-)Reduktionen auffrischen möchtest, kannst Du z. B. Def. 15.9 und 19.1 im Skript Theoretische Informatik $1 + 2$ nachlesen: `http://tinyurl.com/ss16-theoinf`

5. Zusatzaufgabe (20 %) Mit $\mathcal{ALC}_{\mathsf{trans}}$ bezeichnen wir die Erweiterung von $\mathcal{ALC}$ um transitive Rollen, d.h. die TBox darf nun zusätzlich zu Konzeptinklusionen auch Zusicherungen der Form $\mathsf{trans}(r)$ enthalten, wobei r ein Rollenname ist. Eine Interpretation $\mathcal{I}$ erfüllt $\mathsf{trans}(r)$, wenn $r^{\mathcal{I}}$ eine transitive Relation ist.

Sei $\mathcal{T}$ eine $\mathcal{ALC}_{\mathsf{trans}}$-TBox der Form $\{\top \sqsubseteq C_{\mathcal{T}},\ \mathsf{trans}(r_1), \ldots, \mathsf{trans}(r_n)\}$ mit $C_{\mathcal{T}}$ in NNF. Wir definieren eine $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}^*$ wie folgt.

- $\mathcal{T}^*$ enthält $\top \sqsubseteq C_{\mathcal{T}}$.
- Für jedes $\forall r.C \in \mathsf{sub}(C_{\mathcal{T}})$ mit $\mathsf{trans}(r) \in \mathcal{T}$ enthält $\mathcal{T}^*$ die Konzeptinklusion $\forall r.C \sqsubseteq \forall r.\forall r.C$.

Beweise, dass ein Konzeptname A erfüllbar ist bzgl. $\mathcal{T}$ gdw. A erfüllbar ist bzgl. $\mathcal{T}^*$.

Über diese Reduktion kann man den Tableau-Algorithmus und das Verfahren der Typelemination für $\mathcal{ALC}$ also auch für $\mathcal{ALC}_{\mathsf{trans}}$ verwenden.