Beschreibungslogik

Übungsblatt 5

Abgabe am 15. 6. zu Beginn der Übung

---

1. (25 %) Betrachte die folgenden ExpTime-Spiele und bestimme, ob Spielerin 2 eine Gewinnstrategie hat. Wenn dies der Fall ist, gib die Strategie an. Wenn nicht, beschreibe, wie Spielerin 1 spielen muss um zu gewinnen. In beiden Spielen weist die Anfangsbelegung π_0 allen Variablen „falsch" zu.

a) $\varphi = (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg q_1) \vee (p_3 \wedge p_4 \wedge \neg q_2) \vee (\neg(p_1 \vee p_4) \wedge q_1 \wedge q_2)$,
$\Gamma_1 = \{p_1, \dots, p_4\}, \quad \Gamma_2 = \{q_1, q_2\}$

b) $\varphi = ((p_1 \leftrightarrow \neg q_1) \wedge (p_2 \leftrightarrow \neg q_2) \wedge (p_1 \leftrightarrow p_2)) \vee ((p_1 \leftrightarrow q_1) \wedge (p_2 \leftrightarrow q_2) \wedge (p_1 \leftrightarrow \neg p_2))$,
$\Gamma_1 = \{p_1, p_2\}, \quad \Gamma_2 = \{q_1, q_2\}$

2. (25 %) Betrachte den Algorithmus $\mathcal{ALC}$-Worlds auf der Eingabe

$$C_0 \ = \ \exists r.A \ \sqcap \ \exists r.B \ \sqcap \ \forall r.\exists r.A \ \sqcap \ \forall r.\forall r.\neg B \ .$$

Gib den Rekursionsbaum

a) eines erfolgreichen Laufes und

b) eines nicht erfolgreichen Laufes

an. Was folgt aus der Existenz dieser beiden Läufe über die Erfüllbarkeit von C_0?

3. (25 %) Betrachte folgenden vergeblichen Versuch, das Erfüllbarkeitsproblem für $\mathcal{ALC}$ *mit* TBoxen auf das Erfüllbarkeitsproblem für $\mathcal{ALC}$ *ohne* TBoxen zu reduzieren:

Gegeben seien ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C_0 in NNF und eine TBox $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq C_\mathcal{T}\}$; der Einfachheit halber seien C_0 und $C_\mathcal{T}$ wieder in NNF. Die Idee ist nun, zu „erzwingen", dass alle Punkte eines Modells $\mathcal{I}$ von C_0 auch Instanzen von $C_\mathcal{T}$ sind. Dazu fügt man $C_\mathcal{T}$ zu jedem Teilkonzept von C_0, das ein neues Element in $\mathcal{I}$ erfordert, per Konjunktion hinzu. Dies betrifft also C_0 und die Teilkonzepte der Form $\exists r.C$. Genauer formuliert, wird die Ersetzung durch eine Funktion f beschrieben, die Konzeptnamen auf Konzeptnamen abbildet und induktiv wie folgt definiert ist (A ist Konzept*name*).

$$\begin{array}{lll} f(A) = A & f(D_1 \sqcap D_2) = f(D_1) \sqcap f(D_2) & f(\exists r.D_1) = \exists r.(f(D) \sqcap C_\mathcal{T}) \\ f(\neg A) = \neg A & f(D_1 \sqcup D_2) = f(D_1) \sqcup f(D_2) & f(\forall r.D_1) = \forall r.f(D) \end{array}$$

Mit Hilfe von f wandelt man nun C_0 und $\mathcal{T}$ in $C_0^\mathcal{T} := f(C_0) \sqcap C_\mathcal{T}$ um. Sind zum Beispiel $C_0 = \exists r.A \sqcap \forall r.B$ und $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq B'\}$, dann erhält man $C_0^\mathcal{T} = (\exists r.(A \sqcap B') \sqcap \forall r.B) \sqcap B'$. Offenbar kann man das Konzept $C_0^\mathcal{T}$ in polynomieller Zeit konstruieren (denn es gibt nur linear viele Teilkonzepte, und jeder Teilschritt benötigt konstante Zeit). Jedoch stellt diese Transformation keine Reduktion dar, denn es gilt *nicht:*

$$C_0 \text{ ist erfüllbar bzgl. } \mathcal{T} \quad \text{gdw.} \quad C_0^\mathcal{T} \text{ ist erfüllbar} \qquad (*)$$

Gib ein Konzept C_0 und eine TBox $\mathcal{T}$ an, die (*) verletzen, und begründe dies.

Bitte wenden.

4. (25 %) Beweise Lemma 5.24, also die folgende Aussage:

Im PSpace-Spiel φ hat Spieler 1 eine Gewinnstrategie gdw. C_φ erfüllbar ist.

Orientiere Dich dabei am Beweis für Lemma 5.11, der analogen Aussage für ExpTime-Spiele.

5. Zusatzaufgabe (20 %) Erweitere den Typeliminationsalgorithmus aus der Vorlesung auf die Beschreibungslogik $\mathcal{ALCI}$, also auf $\mathcal{ALC}$ mit inversen Rollen. Der neue Algorithmus soll korrekt und vollständig sein und auf jeder Eingabe terminieren (Beweise sind aber nicht gefordert). Wende den erweiterten Algorithmus auf folgende Eingaben an und überprüfe, ob er das richtige Ergebnis liefert:

a) $C_0 = \top,\ \mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq \exists r.A \sqcap \forall r^-.\neg A\}$

b) $C_0 = \top,\ \mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq \exists r^-.A \sqcap \forall r.\neg A\}$