# Beschreibungslogik

## Übungsblatt 6

Abgabe am 29. 6. zu Beginn der Übung

**1.** (25 %) Schreibe eine TBox in $\mathcal{ALC}(\mathcal{B})$, die Wissen über einen Sachverhalt Deiner Wahl repräsentiert. Dabei muss $\mathcal{B}$ ein konkreter Bereich sein, dessen Domäne $\Delta^{\mathcal{B}}$ einer der Zahlenbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ist und der die zweistelligen Prädikate $<, =$ mit den natürlichen Interpretationen und dazu möglicherweise noch weitere Prädikate enthält.

Schreibe mindestens fünf Axiome mit natürlicher Bedeutung, die die zusätzlichen Konstruktoren $\exists, \forall$ aus Definition 5.27 verwenden. Verwende in diesen Axiomen mehrere Featurenamen, die Prädikate $<$ und $=$, mehrere Rollenkomposition $R$ der Länge $\geq 2$ sowie in einem Konstruktor zwei Rollenkompositionen verschiedener Länge. Gib zu jedem Axiom dessen Bedeutung in Worten an. Deine Axiome sollen sich natürlich wesentlich von den Beispielen aus der Vorlesung unterscheiden.

**2.** (25 %) Wende die beiden Algorithmen aus Kapitel 6 der Vorlesung für Subsumtion in $\mathcal{EL}$ (ohne und mit TBoxen) an, um folgende Fragen zu entscheiden:

a) Wird $C$ subsumiert von $D$, wobei

$$C = \exists r.(A \sqcap B \sqcap \exists s.A \sqcap \exists s.B) \quad \text{und} \quad D = \exists r.(A \sqcap \exists s.B) \sqcap \exists r.(B \sqcap \exists s.A)\,?$$

b) Wird $A_1$ subsumiert von $A_2$ bzgl. $\mathcal{T}$, wobei

$$\mathcal{T} = \{A_1 \sqsubseteq \exists r.A_3,\ A_2 \sqsubseteq A_3,\ \top \sqsubseteq \exists s.A_2,\ \exists s.A_3 \sqsubseteq A_1,\ \exists r.A_1 \sqsubseteq A_2\}\,?$$

**3.** (25 %) Beweise die Aussage von Lemma 6.12:

Seien $C, D$ zwei beliebige $\mathcal{EL}$-Konzepte und $\mathcal{T}$ eine $\mathcal{EL}$-TBox. Sei weiterhin $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \{A_C \sqsubseteq C,\ D \sqsubseteq A_D\}$, mit Konzeptnamen $A_C, A_D$, die nicht in $C, D, \mathcal{T}$ vorkommen. Dann gilt:

$$\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{T}' \models A_C \sqsubseteq A_D$$

Hinweis: Es bietet sich an, jede der beiden Richtungen per Kontraposition zu beweisen und dabei die Definition von „$\models$“ zu verwenden.

**4.** (25 %) Seien $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ endliche Interpretationen. Betrachte die Relation $\rho \subseteq \Delta^{\mathcal{I}_1} \times \Delta^{\mathcal{I}_2}$, die im Beweis von Theorem 6.11 definiert wurde. Sei also $\rho_0, \rho_1, \ldots$ eine Folge von Relationen wie folgt:

$$\rho_0 = \{(d,e) \in \Delta^{\mathcal{I}_1} \times \Delta^{\mathcal{I}_2} \mid d \in A^{\mathcal{I}_1} \text{ impliziert } e \in A^{\mathcal{I}_2} \text{ für alle Konzeptnamen } A\}$$

$$\rho_{i+1} = \rho_i \setminus \{(d,e) \mid \text{es gibt einen Rollennamen } r \text{ und } (d,d') \in r^{\mathcal{I}_1}, \text{ so dass } (d',e') \notin \rho_i \text{ für alle } (e,e') \in r^{\mathcal{I}_2}\}$$

Da $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ endlich sind, stabilisiert sich diese Folge nach endlich vielen Schritten; also gibt es ein $i$, so dass $\rho_i = \rho_{i+1}$. Dann ist $\rho := \rho_i$.

Zeige, dass $\rho$ die maximale Simulation von $\mathcal{I}_1$ nach $\mathcal{I}_2$ in folgendem Sinne ist: Wenn $\tau_1, \ldots, \tau_n$ alle Simulationen von $\mathcal{I}_1$ nach $\mathcal{I}_2$ sind, dann gilt

$$\rho = \tau_1 \cup \cdots \cup \tau_n.$$

Hinweis: Für die Inklusion „$\subseteq$“ zeige, dass $\rho$ selbst eine Simulation ist. Für „$\supseteq$“ zeige, dass jede Simulation $\tau_i$ in $\rho$ enthalten ist.

5. **Zusatzaufgabe** (20 %) Seien $\mathcal{I}_1$ ind $\mathcal{I}_2$ Interpretationen. Ein *Homomorphismus von* $\mathcal{I}_1$ *nach* $\mathcal{I}_2$ ist eine (totale) Funktion $f : \Delta^{\mathcal{I}_1} \to \Delta^{\mathcal{I}_2}$, die für alle $d, e \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ folgende Bedingungen erfüllt.

   (i) $d \in A^{\mathcal{I}_1}$ impliziert $f(d) \in A^{\mathcal{I}_2}$ für alle Konzeptnamen $A$.

   (ii) $(d, e) \in r^{\mathcal{I}_1}$ impliziert $(f(d), f(e)) \in r^{\mathcal{I}_2}$ für alle Rollennamen $r$.

   Wir schreiben $(\mathcal{I}_1, d_1) \to (\mathcal{I}_2, d_2)$, wenn es einen Homomorphismus $h$ von $\mathcal{I}_1$ nach $\mathcal{I}_2$ gibt mit $h(d_1) = d_2$.

   Beweise oder widerlege:

   a) Für alle Interpretationen $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ und Elemente $d_i \in \Delta^{\mathcal{I}_i}$ gilt:

   $$(\mathcal{I}_1, d_1) \precsim (\mathcal{I}_2, d_2) \quad \text{gdw.} \quad (\mathcal{I}_1, d_1) \to (\mathcal{I}_2, d_2) \tag{$*$}$$

   b) Für alle *baumförmigen* Interpretationen $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ und Elemente $d_i \in \Delta^{\mathcal{I}_i}$ gilt $(*)$.