

## Vorlesungsübersicht

Kapitel 1: Einleitung

Kapitel 2: Grundlagen

**Kapitel 3: Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen**

Kapitel 4: Tableau-Algorithmen

Kapitel 5: Komplexität

Kapitel 6: Effiziente Beschreibungslogiken

Kapitel 7: ABoxen und Anfragebeantwortung

## Beschreibungslogik

### Kapitel 3: Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen

Sommersemester 2018      Thomas Schneider

AG Theorie der künstlichen Intelligenz (TdKI)

<http://tinyurl.com/ss18-bl>

## Ziel des Kapitels

Die wichtigsten Eigenschaften einer BL sind

- **Ausdrucksstärke** und
- **Komplexität**

Die Ausdrucksstärke kann man **nicht linear quantifizieren**, sondern nur **beschreiben und charakterisieren**.

Wir werden nun

- mehrere Konstruktionen auf Modellen etablieren und
- diese verwenden, um die Ausdrucksstärke von BLen zu studieren.

## Kapitel 3: Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen

1 Bisimulation

2 Endliche Modelleigenschaft und Filtration

# Kapitel 3: Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen

## 1 Bisimulation

## 2 Endliche Modelleigenschaft und Filtration

## Bisimulation: Definition

### Definition 3.1 (Bisimulation)

Seien  $\mathcal{I}_1$  und  $\mathcal{I}_2$  Interpretationen.

Relation  $\rho \subseteq \Delta^{\mathcal{I}_1} \times \Delta^{\mathcal{I}_2}$  ist **Bisimulation** zwischen  $\mathcal{I}_1$  und  $\mathcal{I}_2$ , wenn gilt:

- 1 Wenn  $d_1 \rho d_2$ , dann gilt für alle Konzeptnamen  $A$ :

$$d_1 \in A^{\mathcal{I}_1} \quad \text{gdw.} \quad d_2 \in A^{\mathcal{I}_2}$$

- 2 Wenn  $d_1 \rho d_2$  und  $(d_1, d'_1) \in r^{\mathcal{I}_1}$  für beliebigen Rollennamen  $r$ , dann gibt es ein  $d'_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$  mit  $d'_1 \rho d'_2$  und  $(d_2, d'_2) \in r^{\mathcal{I}_2}$ .
- 3 Wenn  $d_1 \rho d_2$  und  $(d_2, d'_2) \in r^{\mathcal{I}_2}$  für beliebigen Rollennamen  $r$ , dann gibt es ein  $d'_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$  mit  $d'_1 \rho d'_2$  und  $(d_1, d'_1) \in r^{\mathcal{I}_1}$ .

T 3.1

# Überblick

Bisimulation ist graphentheoretischer Begriff;  
beschreibt die „Ähnlichkeit“ von Graphen.

Hängt eng zusammen mit der Ausdrucksstärke von  $\mathcal{ALC}$ .

Wir formalisieren den Zusammenhang und betrachten zwei Anwendungen:

- Beweis der **Nicht-Ausdrückbarkeit** von Eigenschaften
- **Baummodelleigenschaft**

## Bisimulationstheorem

Seien  $\mathcal{I}_1$  und  $\mathcal{I}_2$  Interpretationen,  $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ ,  $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ .

$(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$ : es gibt Bisimulation  $\rho$  zwischen  $\mathcal{I}_1$  und  $\mathcal{I}_2$   
mit  $d_1 \rho d_2$  (wir sagen:  $d_1$  ist **bisimilar** zu  $d_2$ ).

**Beachte:** die leere Relation ist immer Bisimulation!

### Theorem 3.2

Seien  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$  Interpretationen,  $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$  und  $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ .

Wenn  $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$ , dann gilt für alle  $\mathcal{ALC}$ -Konzepte  $C$ :

$$d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} \quad \text{gdw.} \quad d_2 \in C^{\mathcal{I}_2}$$

T 3.2

**Intuitiv:**  $\mathcal{ALC}$  kann nicht zwischen  $d_1$  und  $d_2$  „unterscheiden“.

## Ausdrucksstärke

Wir interessieren uns für Eigenschaften von Elementen  $d$   
in Interpretationen  $\mathcal{I}$ .

## Definition 3.3 (Eigenschaft, Ausdrückbarkeit)

Eine **Eigenschaft**  $E$  ist eine Menge von Paaren  $(\mathcal{I}, d)$ ,  
wobei  $\mathcal{I}$  eine Interpretation und  $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$  ein Element in  $\mathcal{I}$  ist.

$E$  ist in **ALC** **ausdrückbar**, wenn es ein **ALC**-Konzept  $C$  gibt,  
so dass für alle  $\mathcal{I}$  und  $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$  gilt:

$$(\mathcal{I}, d) \in E \quad \text{gdw.} \quad d \in C^{\mathcal{I}}$$

## Intuitionen:

- $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$  hat die Eigenschaft  $E$  gdw.  $(\mathcal{I}, d) \in E$ .
- $E$  ist ausdrückbar, wenn es ein **äquivalentes** **ALC**-Konzept  $C$  gibt.

## Ausdrucksstärke und Bisimulation

Beschränkungen der Ausdrucksstärke von **ALC** beweisen.

Das ist schwierig mit syntaktischen Argumenten,  
aber Bisimulation erlaubt **semantisches Argument!**

## Theorem 3.4

In **ALC** sind **nicht ausdrückbar**:

- das **ALCI**-Konzept  $\exists r^{-}.T$
- die **ALCQ**-Konzepte
  - $\leq nr.T$ , für alle  $n > 0$
  - $\geq nr.T$ , für alle  $n > 1$

## T 3.3

## Ausdrucksstärke

## Typische Eigenschaften,

für deren Ausdrückbarkeit wir uns interessieren:

- $d$  hat einen  $r$ -Nachfolger in  $\mathcal{I}$
- es gibt einen von  $d$  ausgehenden endlichen  $r$ -Pfad in  $\mathcal{I}$ ,  
dessen letztes Element Instanz von  $C$  ist
- jedes Element von  $\Delta^{\mathcal{I}}$  ist  $r$ -Nachfolger von  $d$

Eigenschaft kann auch in logischem Formalismus gegeben sein, z. B.:

- $\exists r^{-}.A$
- $\exists y (r(y, x) \wedge A(y))$

## Ausdrucksstärke und Bisimulation

Im Beweis von Theorem 3.4 gesehen:

Die Argumentation zum Beweis der Nicht-Ausdrückbarkeit  
läuft immer auf dasselbe hinaus:

## Theorem 3.5

Sei  $E$  eine Eigenschaft. Wenn es Interpretationen  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$  und  
Elemente  $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$  und  $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$  gibt, so dass

- $(\mathcal{I}_1, d_1) \in E$  und  $(\mathcal{I}_2, d_2) \notin E$  sowie
- $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$ ,

dann ist  $E$  nicht in **ALC** ausdrückbar.

## Baummodelleigenschaft

### Nachweis der Baummodelleigenschaft

- Interpretation  $\mathcal{I}$  ist **Baum**, wenn  $(\Delta^{\mathcal{I}}, \bigcup_r r^{\mathcal{I}})$  Baum ist.  
(endlich oder unendlich)
- Konzept  $C$  und TBox  $\mathcal{T}$  haben **gemeinsames Baummodell**  $\mathcal{I}$ ,  
wenn  $\mathcal{I}$  Modell von  $\mathcal{T}$  und Baum mit Wurzel  $d$  sowie  $d \in C^{\mathcal{I}}$ .

### $\mathcal{ALC}$ hat die Baummodelleigenschaft:

#### Theorem 3.6

Wenn ein  $\mathcal{ALC}$ -Konzept  $C$  bzgl. einer  $\mathcal{ALC}$ -TBox  $\mathcal{T}$  erfüllbar ist, dann haben  $C$  und  $\mathcal{T}$  ein gemeinsames Baummodell  $\mathcal{I}$ .

T 3.4

Ist Grundlage für Algorithmen, erlaubt Aussagen über Ausdrucksstärke.

Beweis mittels fundamentaler Modellkonstruktion: **Unravelling**.

## Baummodelleigenschaft und Bisimulation

Sei  $\mathcal{J}$  Unravelling von  $\mathcal{I}$  an Stelle  $d$ .

#### Lemma 3.8

Für alle  $\mathcal{ALC}$ -Konzepte  $C$  und alle  $p \in \Delta^{\mathcal{J}}$  gilt:

$$\text{end}(p) \in C^{\mathcal{I}} \quad \text{gdw.} \quad p \in C^{\mathcal{J}}$$

T 3.6

Es folgt Theorem 3.6:

#### Theorem 3.6 (wiederholt)

Wenn ein  $\mathcal{ALC}$ -Konzept  $C$  bzgl. einer  $\mathcal{ALC}$ -TBox  $\mathcal{T}$  erfüllbar ist, dann haben  $C$  und  $\mathcal{T}$  ein gemeinsames Baummodell  $\mathcal{I}$ .

T 3.7

Baummodelleigenschaft gilt **nicht** in Prädikatenlogik 1. Stufe (FO).

## Unravelling

Sei  $\mathcal{I}$  eine Interpretation und  $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ .

**$d$ -Pfad in  $\mathcal{I}$ :** Sequenz  $d_1 d_2 \cdots d_n$ ,  $n \geq 1$ , mit  $d_1 = d$  und  
für alle  $i < n$ : es gibt Rollenname  $r$  mit  $(d_i, d_{i+1}) \in r^{\mathcal{I}}$  T 3.5

$\text{end}(d_1 d_2 \cdots d_n) = d_n$

#### Definition 3.7 (Unravelling)

**Unravelling von  $\mathcal{I}$  an Stelle  $d$**  ist folgende Interpretation  $\mathcal{J}$ :

$\Delta^{\mathcal{J}} =$  Menge aller  $d$ -Pfade in  $\mathcal{I}$

$A^{\mathcal{J}} = \{p \in \Delta^{\mathcal{J}} \mid \text{end}(p) \in A^{\mathcal{I}}\}$

$r^{\mathcal{J}} = \{(p, p') \in \Delta^{\mathcal{J}} \times \Delta^{\mathcal{J}} \mid$   
es gibt  $e : p' = p \cdot e$  und  $(\text{end}(p), e) \in r^{\mathcal{I}}\}$

für alle Konzeptnamen  $A$  und Rollenamen  $r$ .

T 3.5 Forts.

## Bisimulation versus Ausdrucksstärke

Entsprechen Bisimulationen *genau* der Ausdrucksstärke von  $\mathcal{ALC}$ ?

**Nein!**

Gegenrichtung von Thm. 3.2 (also auch von Thm. 3.5) gilt nicht:

Es gibt Interpretationen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{J}$  und  $d \in \mathcal{I}$ ,  $e \in \mathcal{J}$ , so dass

- $d \in C^{\mathcal{I}}$  gdw.  $e \in C^{\mathcal{J}}$  für alle  $\mathcal{ALC}$ -Konzepte  $C$ ,
- aber  $(\mathcal{I}, d) \not\sim (\mathcal{J}, e)$ .

T 3.8

Sie gilt allerdings für bestimmte Klassen von Interpretationen, z. B.:

- die Klasse aller endlichen Interpretationen
- die Klasse aller Interpretationen mit endlicher Verzweigungszahl

⋮

Solche Klassen nennt man **Hennessy-Milner-Klassen**.

Bisimulation für Erweiterungen von  $\mathcal{ALC}$ 

Für  $\mathcal{ALCI}$ ,  $\mathcal{ALCQ}$ ,  $\mathcal{ALCQI}$  gibt es auch Bisimulationsbegriffe.

Zusätzliche Bedingungen für  $\mathcal{ALCI}$ :

- ④ Wenn  $d_1 \rho d_2$  und  $(d'_1, d_1) \in r^{\mathcal{I}_1}$  für beliebigen Rollennamen  $r$ , dann gibt es ein  $d'_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$  mit  $d'_1 \rho d'_2$  und  $(d'_2, d_2) \in r^{\mathcal{I}_2}$ .
- ⑤ Wenn  $d_1 \rho d_2$  und  $(d'_2, d_2) \in r^{\mathcal{I}_2}$  für beliebigen Rollennamen  $r$ , dann gibt es ein  $d'_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$  mit  $d'_1 \rho d'_2$  und  $(d'_1, d_1) \in r^{\mathcal{I}_1}$ .

Dann gilt Theorem 3.2 und man kann z. B.

eine Variante der Baummodelleigenschaft für  $\mathcal{ALCI}$  beweisen.

(Kanten im Baum können auch zur Wurzel gerichtet sein)

Auch  $\mathcal{ALCQ}$  und  $\mathcal{ALCQI}$  haben die Baummodelleigenschaft.

## Überblick

**Endliche Modelleigenschaft:** wenn  $C$  erfüllbar bzgl.  $\mathcal{T}$ , dann haben  $C$  und  $\mathcal{T}$  auch *endliches* gemeinsames Modell.

**Filtration** wandelt Modell von Konzept und TBox in endliches Modell.

**Zentrale Idee:** Identifikation **ununterscheidbarer** Elemente (im Sinne von: erfüllen dieselben Konzepte)

## Kapitel 3: Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen

- 1 Bisimulation
- 2 Endliche Modelleigenschaft und Filtration

## Größe von Konzepten und TBoxen

## Definition 3.9

Die **Größe**  $|C|$  eines  $\mathcal{ALC}$ -Konzeptes  $C$  ist induktiv definiert:

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \\ |\neg C| &= |C| + 1 \\ |C \sqcap D| = |C \sqcup D| &= |C| + |D| + 1 \\ |\exists r.C| = |\forall r.C| &= |C| + 3 \end{aligned}$$

Die **Größe**  $|\mathcal{T}|$  einer TBox  $\mathcal{T}$  ist:

$$\sum_{C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}} |C| + |D| + 1$$

Intuitiv: Anzahl Symbole in  $C$  bzw.  $\mathcal{T}$

## Endliche/beschränkte Modelleigenschaft

$\mathcal{ALC}$  hat **endliche Modelleigenschaft**:

## Theorem 3.10

Wenn ein  $\mathcal{ALC}$ -Konzept  $C$  bzgl. einer  $\mathcal{ALC}$ -TBox  $\mathcal{T}$  erfüllbar ist, dann haben  $C$  und  $\mathcal{T}$  ein gemeinsames **endliches** Modell.

$\mathcal{ALC}$  hat sogar **beschränkte Modelleigenschaft**:

## Theorem 3.11

Wenn ein  $\mathcal{ALC}$ -Konzept  $C$  bzgl. einer  $\mathcal{ALC}$ -TBox  $\mathcal{T}$  erfüllbar ist, dann haben  $C$  und  $\mathcal{T}$  ein gemeinsames Modell **der Kardinalität**  
 $\leq 2^{|C|+|\mathcal{T}|}$ .

## Teilkonzepte

## Definition 3.12 (Teilkonzepte)

- $\text{sub}(C)$  ist Menge der Teilkonzepte von  $C$ , einschließlich  $C$ .
- $\text{sub}(\mathcal{T}) := \bigcup_{C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}} \text{sub}(C) \cup \text{sub}(D)$
- $\text{sub}(C, \mathcal{T}) := \text{sub}(C) \cup \text{sub}(\mathcal{T})$

T 3.9

## Lemma 3.13

$$|\text{sub}(C, \mathcal{T})| \leq |C| + |\mathcal{T}|$$

**Beweis:** per Induktion über  $C$  (siehe Übungen)

## Typen: Intuition

Im Folgenden sei  $C$   $\mathcal{ALC}$ -Konzept und  $\mathcal{T}$  TBox, so dass  $C$  erfüllbar bzgl.  $\mathcal{T}$ .

**Wir benutzen Typen.** Ein Typ ...

- ist Menge von Konzepten
- beschreibt ein Element  $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$  in einer Interpretation  $\mathcal{I}$
- ist eingeschränkt auf **Teilkonzepte** von  $C$  und  $\mathcal{T}$  (um Endlichkeit zu erreichen)

Typen sind zentral für viele Techniken in Beschreibungslogik.

## Typen: Definition

Definition 3.14 (Typ von  $d$ )

Sei  $\mathcal{I}$  Interpretation,  $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ . Der **Typ**  $t_{\mathcal{I}}(d)$  von  $d$  in  $\mathcal{I}$  ist

$$t_{\mathcal{I}}(d) = \{D \in \text{sub}(C, \mathcal{T}) \mid d \in D^{\mathcal{I}}\}.$$

T 3.10

## Lemma 3.15

Für jede Interpretation  $\mathcal{I}$  gilt:  $\#\{t_{\mathcal{I}}(d) \mid d \in \Delta^{\mathcal{I}}\} \leq 2^{|C|+|\mathcal{T}|}$

(direkte Konsequenz aus Lemma 3.13)

## Filtration: Idee

- Gegeben Interpretation  $\mathcal{I}$ , identifiziere alle Elemente gleichen Typs.
- Danach kommt also jeder Typ nur einmal vor.
- Nach Lemma 3.15 gibt es nur  $\leq 2^{|\mathcal{C}|+|\mathcal{T}|}$  viele Typen.
- Wenn  $\mathcal{I}$  Modell von  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{T}$ , so auch das Resultat.

## Endliche/beschränkte Modelleigenschaft

Theorem 3.11 folgt nun unmittelbar aus Thm. 3.17 und Lem. 3.15.

## Theorem 3.11 (wiederholt)

Wenn ein  $\mathcal{ALC}$ -Konzept  $\mathcal{C}$  bzgl. einer  $\mathcal{ALC}$ -TBox  $\mathcal{T}$  erfüllbar ist, dann haben  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{T}$  ein gemeinsames Modell der Kardinalität  $\leq 2^{|\mathcal{C}|+|\mathcal{T}|}$ .

Ähnliche Resultate lassen sich für  $\mathcal{ALCI}$  und  $\mathcal{ALCQ}$  beweisen (mit derselben Schranke).

## Filtration

## Definition 3.16 (Filtration)

Sei  $\mathcal{I}$  Interpretation. Definiere Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $\Delta^{\mathcal{I}}$ :

$$d \sim e \text{ gdw. } t_{\mathcal{I}}(d) = t_{\mathcal{I}}(e)$$

Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von  $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$  bzgl.  $\sim$  mit  $[d]$ .

Die **Filtration von  $\mathcal{I}$  bzgl.  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{T}$**  ist folgende Interpretation  $\mathcal{J}$ :

$$\Delta^{\mathcal{J}} = \{[d] \mid d \in \Delta^{\mathcal{I}}\}$$

$$A^{\mathcal{J}} = \{[d] \mid d \in A^{\mathcal{I}}\} \text{ für alle } A \in \text{sub}(\mathcal{C}, \mathcal{T})$$

$$r^{\mathcal{J}} = \{([d], [e]) \mid \exists d' \in [d], e' \in [e] : (d', e') \in r^{\mathcal{I}}\} \\ \text{für alle Rollennamen } r$$

( $A^{\mathcal{J}}$  ist wohldefiniert: Repräsentantenunabhängigkeit)

**T 3.10 Forts.**

## Theorem 3.17

Wenn  $\mathcal{I}$  Modell von  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{T}$ , so auch  $\mathcal{J}$ .

**T 3.11**

## Endliche/beschränkte Modelleigenschaft

Im Kontrast zu  $\mathcal{ALC}$ :

## Theorem 3.18

$\mathcal{ALCQI}$  hat **nicht** die endliche Modelleigenschaft.

**Beweis:**

$A$  hat bzgl. folgender TBox nur unendliche Modelle:

$$\top \sqsubseteq \exists r. \neg A$$

$$\top \sqsubseteq \leq 1 r^{-}. \top$$

**T 3.12**

Filtration ist also nicht für  $\mathcal{ALCQI}$  anwendbar.

## Entscheidbarkeit

## Theorem 3.11 (wiederholt)

Wenn ein  $\mathcal{ALC}$ -Konzept  $C$  bzgl. einer  $\mathcal{ALC}$ -TBox  $\mathcal{T}$  erfüllbar ist, dann haben  $C$  und  $\mathcal{T}$  ein gemeinsames Modell der Kardinalität  $\leq 2^{|C|+|\mathcal{T}|}$ .

Daraus folgt, dass Erfüllbarkeit entscheidbar ist:

## Algorithmus für Erfüllbarkeit:

Gegeben  $C$  und  $\mathcal{T}$ , so dass  $|C| + |\mathcal{T}| = n$ ,

- Erzeuge alle Interpretation  $\mathcal{I}$  mit  $|\Delta|^{\mathcal{I}} \leq 2^n$  (es gibt „nur“ höchstens  $2^{2^n}$  viele davon).
- Überprüfe, ob  $\mathcal{I}$  Modell von  $C$  und  $\mathcal{T}$  ist (in Zeit polynomiell in  $\mathcal{I}$ ,  $C$  und  $\mathcal{T}$ ).

T 3.13

## Entscheidbarkeit

## Beweis von Lemma 3.19.

Folgender rekursiver Algorithmus berechnet Extension von  $C$  in  $\mathcal{I}$ :

```

procedure ext( $C, \mathcal{I}$ )
case  $C = A$ : return  $A^{\mathcal{I}}$ 
 $C = \neg D$ : return  $\Delta^{\mathcal{I}} \setminus \text{ext}(D, \mathcal{I})$ 
 $C = D \sqcap E$ : return  $\text{ext}(D, \mathcal{I}) \cap \text{ext}(E, \mathcal{I})$ 
 $C = D \sqcup E$ : return  $\text{ext}(D, \mathcal{I}) \cup \text{ext}(E, \mathcal{I})$ 
 $C = \exists r.D$ : return  $\{d \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists e \in \text{ext}(D, \mathcal{I}) : (d, e) \in r^{\mathcal{I}}\}$ 
 $C = \forall r.D$ : return  $\{d \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \forall e \text{ mit } (d, e) \in r^{\mathcal{I}} : e \in \text{ext}(D, \mathcal{I})\}$ 
endcase

```

Zeitaufwand dieses Algorithmus ist  $\mathcal{O}(|C| \cdot |\Delta^{\mathcal{I}}|^2)$ :

- Anzahl der (rekursiven) Aufrufe =  $|\text{sub}(C)| \leq |C|$
- pro Aufruf Zeitaufwand  $\mathcal{O}(|\Delta^{\mathcal{I}}|^2)$ : simple Operationen auf Teilmengen von  $\Delta^{\mathcal{I}}$

## Entscheidbarkeit

## Lemma 3.19

Gegeben sei  $\mathcal{ALC}$ -Konzept  $C$  und endl. Interpretation  $\mathcal{I}$ .

Man kann in **polynomieller Zeit**

— genauer: in Zeit  $\mathcal{O}(|C| \cdot |\Delta^{\mathcal{I}}|^2)$  — die Extension  $C^{\mathcal{I}}$  berechnen.

## Korollar 3.20

Gegeben seien  $C, \mathcal{T}$  in  $\mathcal{ALC}$  und endl. Interpretation  $\mathcal{I}$ .

Man kann in **polynomieller Zeit**

— genauer: in Zeit  $\mathcal{O}((|\mathcal{T}| + |C|) \cdot |\Delta^{\mathcal{I}}|^2)$  — entscheiden, ob  $\mathcal{I}$  ein Modell von  $C$  und  $\mathcal{T}$  ist.

(d. h.: *Model checking* ist in Polynomialzeit)

## Entscheidbarkeit

## Theorem 3.21

In  $\mathcal{ALC}$  ist Erfüllbarkeit bzgl. TBoxen entscheidbar.

**Komplexität:** 2ExpTime (doppelt exponentielle Zeit)

- 2-exponentiell viele Interpretationen müssen geprüft werden.
- Jede Prüfung braucht polynomielle Zeit.

Dieser Ansatz ist **kaum tauglich für die Praxis**:

- Die Komplexität ist höher als nötig.
- Das Aufzählen aller Modelle ist nicht praktikabel.



## Literatur für dieses Kapitel



F. Baader, I. Horrocks, C. Lutz, U. Sattler.

**An Introduction to Description Logic.**

Cambridge University Press, 2017.

Kapitel 3: A Little Bit of Model Theory

In SUUB verfügbar: <https://tinyurl.com/suub-intro-dl-ebook>

<https://tinyurl.com/suub-intro-dl>