Komplexitätstheorie

SoSe 2018

Prof. Dr. Thomas Schneider
AG Theorie der künstlichen Intelligenz
Cartesium, Raum 1.56
ts[ÄT]informatik.uni-bremen.de

Homepage der Vorlesung: http://tinyurl.com/ss18-kt

Organisatorisches

Zeit und Ort:

Di 12–14 Studierhaus D 1020 (am Boulevard gegenüber SUUB)
Do 14–16 SFG 2030 (Backsteinbau zwischen Cartesium & Café Unique)

Vortragender:

Thomas Schneider
Cartesium Raum 1.56
Tel. (218)-64432
ts[ÄT]informatik.uni-bremen.de

Position im Curriculum:

Wahlbereich Master-Ergänzung
Modulbereich Theorie
Master-Profile SQ und KIKR

Organisatorisches

Voraussetzungen:

Grundkenntnisse aus Vorlesung „Theoretische Informatik 1+2“

Form:

K4

3 Termine Vorlesung, 1 Termin Übung (siehe Liste auf Homepage)

Diskussion in Vorlesung jederzeit erwünscht!

Vorlesungsmaterial:

- Folien und Aufgabenblätter auf Homepage:

  `http://tinyurl.com/ss18-kt`

- Beispiele, Beweise etc. an der Tafel (mitschreiben!)

Literatur

- Sanjeev Arora, Boaz Barak.
  Computational Complexity: a Modern Approach.
  Cambridge University Press, 2009.

- Oded Goldreich.
  Computational Complexity: a Conceptual Perspective.
  Cambridge University Press, 2008.

- Christos H. Papadimitriou.
  Computational Complexity.
  Addison-Wesley, 1994.

- Ingo Wegener.
  Komplexitätstheorie — Grenzen der Effizienz von Algorithmen.
  Springer, 2003.

- Dexter Kozen.
  Theory of Computation.
  Springer, 2006.

- **The Parallel Computation Project:**
  http://cs.armstrong.edu/greenlaw/research/PARALLEL/index.html

Prüfungen

Übungsaufgaben & Fachgespräch:

- Übungsaufgaben ca. jede zweite Woche;
  voraussichtlich 6 Blätter, mit Zusatzaufgaben
- Werden in Gruppen (2–3 Personen) bearbeitet, abgegeben und korrigiert – jede_r muss mindestens einmal vorrechnen
- Aus der erreichten Gesamtpunktzahl aller Blätter ergibt sich die vorläufige Note für diesen Kurs
- Fachgespräche am Ende des Semesters
  (Prüfungsleistung, Änderung der Note möglich)
  Voraussetzung: insgesamt 50% der Punkte in Übungsaufgaben

oder

Mündliche Prüfung

Wiederholungsregelungen auf der nächsten Folie …

Prüfungen

Wiederholungsregelungen

- Fachgespräch nicht bestanden?
  1 Wiederholungsversuch im selben Semester möglich
- Weitere Wiederholungsversuche (wenn nötig):

  mündliche Prüfung in den folgenden 4 Semestern
  (je 1 Versuch pro Semester)

Übungen

Terminübersicht (geplant):

Blatt	Erscheinen (geplant)	Abgabe	Besprechung, Übungstermin
1	**Fr. 6. 4.**	Di. 17. 4.	Do. 19. 4.
2	Mo. 23. 4.	**So. 6. 5.**	**Di. 8. 5.**
3	Di. 8. 5.	Di. 22. 5.	Do. 24. 5.
4	Di. 22. 5.	Di. 5. 6.	Do. 7. 6.
5	Di. 5. 6.	Di. 19. 6.	Do. 21. 6.
6	Di. 19. 6.	Di. 3. 7.	Do. 4. 7.

- Blätter erscheinen auf Homepage der Vorlesung
- Abgabe per PDF, Upload in Stud.IP (separater Ordner, bis 23:59 Uhr)

Komplexitätstheorie

Ziel der Komplexitätstheorie

Analyse der inhärenten Komplexität von Problemen

➡ **Komplexität:** hauptsächlich Laufzeit,
aber auch andere Ressourcen (insbesondere Platzbedarf)

➡ **Inhärent:** Laufzeit-/Ressourcenverbrauch
des bestmöglichen Algorithmus für gegebenes Problem

Zwei Sichtweisen:

- **Problemzentriert:**
  Wie ressourcenaufwändig ist gegebenes Problem?
- **Ressourcenzentriert:**
  Welche Probleme kann ich mit gegebenen Ressourcen lösen?

  Also: was ist Grenze der Berechenbarkeit
  unter beschränkten Ressourcen?

Beispiel: Erreichbarkeit in Graphen

Definition Pfad, Erreichbarkeit

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.

Ein *Pfad* in G ist Folge von Knoten $v_0, \ldots, v_k$,
so dass $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle $i < k$.

Ein Knoten v' ist *erreichbar* von einem Knoten v in G,
wenn es einen Pfad $v_0, \ldots, v_k$ gibt mit $v = v_0$ und $v_k = v'$.

T1.1

Erreichbarkeitsproblem:

Gegeben G, v, v', entscheide ob v' erreichbar von v in G ist.

➡ Zentrales Problem der Informatik, z. B. Erreichbarkeit von Knoten in Netzwerken, Analyse von Automaten, vieles andere mehr.

Beispiel: Erreichbarkeit in Graphen

Algorithmus 1

Zähle alle Folgen von Knoten $v_0, \ldots, v_k$ auf mit $k \leq |V|$.
Überprüfe für jede Folge, ob

- $v = v_0$ und $v_k = v'$
- $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle $i < k$.

Antworte „erreichbar“, wenn dies für mindestens eine Folge zutrifft.
Sonst antworte „unerreichbar“.

T1.2

Korrektheit:

- Wenn der Algorithmus „erreichbar“ antwortet,
  so ist dies offensichtlich korrekt.
- Wenn v' von v erreichbar ist,
  so gibt es Pfad von v zu v', auf dem kein Knoten doppelt vorkommt.

  Dieser Pfad hat max. Länge $|V|$ und wird vom Algorithmus gefunden.

Beispiel: Erreichbarkeit in Graphen

Algorithmus 1

Zähle alle Folgen von Knoten $v_0, \ldots, v_k$ auf mit $k \leq |V|$.
Überprüfe für jede Folge, ob

- $v = v_0$ und $v_k = v'$
- $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle $i < k$.

Antworte „erreichbar“, wenn dies für mindestens eine Folge zutrifft.
Sonst antworte „unerreichbar“.

Für jeden Pfad der Länge k kann die angegebene Bedingung in Zeit $p(k)$ überprüft werden, mit $p(\cdot)$ Polynom.

Wenn $|V| = n > 1$, so untersucht der Algorithmus mehr als $n^n \geq 2^n$ Pfade.

Insgesamt braucht der Algorithmus also exponentiell viel Zeit

Beispiel: Erreichbarkeit in Graphen

Natürliche Frage:

Ist das Problem inhärent schwer oder der Algorithmus schlecht?

Algorithmus 2

$S := \{v\}$
markiere v
while $S \neq \emptyset$ **do**
  wähle $u \in S$
  $S := S \setminus \{u\}$
  forall $(u, u') \in E$ **do**
    if u' *nicht markiert* **then**
      $S := S \cup \{u'\}$
      markiere u'

if v' *markiert* **then** antworte „erreichbar“ **else** antworte „unerreichbar“

T1.3

Beispiel: Erreichbarkeit in Graphen

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass Algorithmus 2 korrekt ist. (Übung)

Laufzeitanalyse:

- Jeder Knoten wird höchstens einmal zu S hinzugefügt (beim Markieren)
- Die while Schleife macht also höchstens $n = |V|$ Schritte.
- Da jeder Knoten höchstens n Nachbarn hat, macht die “for all” Schleife höchstens n Schritte
- Insgesamt $\mathcal{O}(n^2)$ Schritte: polynomiell!

Algorithmus 1 war also tatsächlich suboptimal!

Weiter optimierter Algorithmus hat sogar lineare Laufzeit ($\mathcal{O}(n)$ Schritte)

Beispiel: Cliquenproblem

Definition Clique

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

Eine *Clique* in G ist eine nicht-leere Knotenmenge $C \subseteq V$, so dass $\{v, v'\} \in E$ für alle $v, v' \in C$.

Die *Größe* einer Clique ist die Anzahl der darin enthaltenen Knoten.

T1.4

Cliquenproblem:

Gegeben Graph G und Zahl k, entscheide ob G Clique der Größe k hat.

Beispiel: Cliquenproblem

Algorithmus

Zähle alle Teilmengen $C \subseteq V$ der Kardinalität k auf.
Für jede solche Teilmenge prüfe, ob sie Clique ist.
Wenn eine Clique gefunden wurde, antworte “ja”
Sonst antworte “nein”.

T1.5

Der Algorithmus ist offensichtlich korrekt.

Laufzeit:

- Es kann in polynomieller Zeit geprüft werden, ob gegebenes $C \subseteq V$ eine k-Clique ist.
- Wenn $|V| = n$, dann gibt es $\binom{n}{k}$ Teilmengen der Größe k.

  Wenn z. B. $k = \frac{n}{2}$, dann $\binom{n}{k} \geq 2^n$, also exponentieller Zeitbedarf!

Beispiel: Cliquenproblem

Dieselbe Frage:

Ist das Problem inhärent schwer oder der Algorithmus schlecht?

Beachte: der Algorithmus hat viel Ähnlichkeit mit Algorithmus 1 für Erreichbarkeit!

Antwort:

1. Das ist unbekannt. (wie für viele natürliche Probleme)
2. Die Komplexitätstheorie erlaubt es uns trotzdem, das Cliquen-problem als „schwierig“ zu identifizieren. (NP-Vollständigkeit)

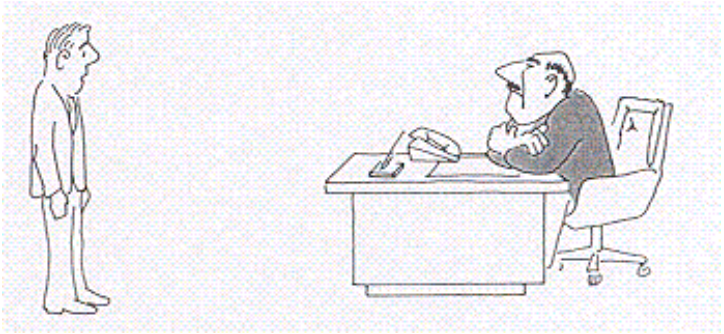
Wir brauchen also keine Zeit damit zu verschwenden,
nach einem polynomiellen Algorithmus zu suchen!

Beispiel: Cliquenproblem

Diese Antwort ist typisch für die Komplexitätstheorie:

- Es gibt in diesem Bereich viele schwierige und ungelöste Probleme, darunter die bekanntesten in der Informatik.
- Nur wenig Resultate über die nicht-Machbarkeit
  (z. B. „das Cliquenproblem kann nicht in polynomieller Zeit gelöst werden“)
- Stattdessen relative Aussagen:
  „Problem *X* ist mindestens so schwer wie all diese anderen Probleme hier; für keines ist ein effizienter Algorithmus bekannt”
- Auf diese Weise ergibt sich eine reiche Struktur im Raum aller Probleme
- Dies liefert ein sehr gutes Werkzeug, um die Schwierigkeit eines gegebenen Problems einzuschätzen. (sehr wichtig auch in der Praxis!)

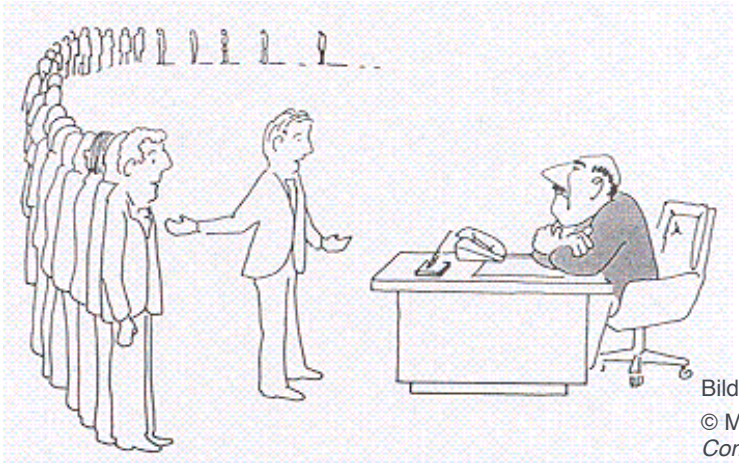
Klassiker



Ich konnte keinen effizienten Algorithmus finden; ich bin wohl zu dumm.

Ich konnte keinen effizienten Algorithmus finden, weil es keinen gibt (glaube ich).

Gäbe es einen effizienten Algorithmus, dann auch für Tausende andere Probleme, an denen sich Generationen von Forscher_innen die Zähne ausgebissen haben.



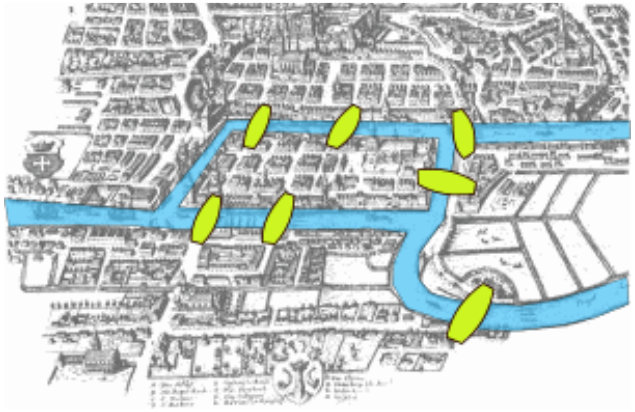
Bilder
© M. R. Garey, D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* Freeman, New York, 1979.

Hätten Sie's gewusst?

Manchmal entscheiden Kleinigkeiten über die Schwierigkeit eines Problems:

Einfach (polynomielle Zeit):

Euler-Kreis: gegeben ungerichteter Graph, entscheide ob es einen Pfad gibt, der jede Kante genau einmal besucht und wieder am Anfang ankommt.



Schwer (NP-vollständig):

Hamilton-Kreis: gegeben ungerichteter Graph, entscheide ob es einen Pfad gibt, der jeden Knoten genau einmal besucht und wieder am Anfang ankommt.

Hätten Sie's gewusst?

Manchmal entscheiden Kleinigkeiten über die Schwierigkeit eines Problems:

Einfach (polynomielle Zeit):

Minimaler Schnitt: gegeben ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl k, kann man V in Mengen V_1, V_2 partitionieren, so dass es höchstens k Kanten zwischen Elementen von V_1 und V_2 gibt?

T1.6

Schwer (NP-vollständig):

Maximaler Schnitt: gegeben ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl k, kann man V in Mengen V_1, V_2 partitionieren, so dass es mindestens k Kanten zwischen Elementen von V_1 und V_2 gibt?

Übersicht Vorlesung

Kapitel 1: Einführung

Kapitel 2: Turingmaschinen

Kapitel 3: P vs. NP

Kapitel 4: Mehr Ressourcen, mehr Möglichkeiten?

Kapitel 5: Platzkomplexität

Kapitel 6: Schaltkreise

Kapitel 7: Orakel

Vier Klarstellungen:

- Laufzeitanalyse
- Worst-Case-Komplexität
- Repräsentation der Eingabe
- Entscheidungsprobleme vs. Berechnungsprobleme vs. Optimierungsprobleme

Laufzeitanalyse

Laufzeit ist Funktion:
Anzahl Schritte in Abhängigkeit von Größe der Eingabe

Beim Beschreiben der Funktion abstrahieren wir häufig stark:

- Konstanten werden ignoriert ($\mathcal{O}$-Notation)
- Meist ignorieren wir sogar den Grad von Polynomen

Insbesondere interessieren wir uns für
polynomielle vs. exponentielle Laufzeit.

Eingabegröße	1	2	3	4	5	6	7	8		20	128
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64		400	16,384
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256		1.048.576	**Autsch!**

„Autsch“: Moderner Prozessor braucht mehr Zeit
als vom Anfang des Universums bis heute!

Worst Case Komplexität

Welche Art von Komplexität studieren wir?

Laufzeit …

- ist obere Schranke für alle Eingaben derselben Größe
- bezieht sich also auf den schlimmstmöglichen Fall

Man spricht von Worst-Case-Komplexität.

Worst Case Komplexität

Auf bestimmten Eingaben/Eingabeklassen
kann der Algorithmus aber viel besser sein als im Worst Case.

Beispiel Cliquenproblem:

Betrachte Klasse der „sparse“ Graphen:
viele Knoten haben nur sehr wenige Nachbarn.

Dann ist folgende Heuristik sehr effektiv:

Vor dem Suchen einer Clique der Größe k
eliminiere alle Knoten mit weniger als k Nachbarn.

Die Worst-Case-Komplexität des naiven Algorithmus
ändert sich dadurch jedoch überhaupt nicht!

Worst Case Komplexität

Auch möglich ist die Untersuchung der Laufzeit
auf typischen Eingaben (Average-Case-Komplexität).

Dies ist jedoch in der Regel schwieriger:

- Man braucht eine gute Charakterisierung von typischen Eingaben (oft schwer zu bestimmen)
- Typische Eingaben werden oft über Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschrieben (technisch anspruchsvoll)

In der klassischen Komplexitätstheorie und dieser VL geht es …

✓ um Worst-Case-Komplexität (vorsichtiger Ansatz!)

- nicht um Heuristiken / Average-Case-Komplexität

Repräsentation der Eingabe

Eingabe kann in der Regel verschieden repräsentiert werden:

- Graphen: Adjazenzmatrix oder Liste von Kanten **T1.7**
- Zahlen: z. B. unär/binär/dezimal kodiert

Größe kann von Repräsentation abhängen:

- Zahl n :
  - unär Größe n
  - binär Größe $\log(n)$
  - jede andere Basis $\frac{1}{c} \cdot \log(n)$

➡ „log“ ohne Index steht ab jetzt immer für „$\log_2$“, also „Logarithmus zur Basis 2“.

T1.8

- Graph mit n Knoten:
  - Adjazenzmatrix hat immer Größe n^2
  - Größe der Kantenliste hängt von Anzahl Kanten ab $(\leq n^2)$

Repräsentation der Eingabe

Also hängt auch die Laufzeit von der Repräsentation ab, z. B.:

- Man kann einfach in polynomieller Zeit entscheiden, ob Zahl prim ist, wenn diese unär kodiert ist.

T1.9

- Für binäre Kodierung konnte dies erst 2002 von Agrawal, Kayal und Saxena gezeigt werden („AKS Primality Test“).

Meist unterscheiden sich die Größen verschiedener Repräsentationen nur polynomiell, z. B. Adjazenzmatrix vs. Kantenliste

Daher werden wir die Repräsentation meist nicht im Detail fixieren.

Ausnahme: Zahlen (wir nehmen stets binäre Kodierung an!)

Kapitel 1

Entscheidungs- / Berechnungs- / Optimierungsprobleme

Varianten algorithmischer Problem

Algorithmische Probleme haben meist (mindestens) drei Varianten.

Am Beispiel des Cliquenproblems:

(a) Entscheidungsproblem (wie vorher)
Gegeben G und k, entscheide ob G eine k-Clique hat

(b) Berechnungsproblem
Gegeben G und k, berechne eine k-Clique in G
(gib $\perp$ aus, wenn keine existiert)

(c) Optimierungsproblem
Gegeben G, berechne eine Clique in G von maximaler Größe

Welche Variante die natürlichste ist, hängt von Problem und Anwendung ab.

Varianten algorithmischer Probleme

Komplexitätstheorie konzentriert sich auf Entscheidungsprobleme:

- einfacher zu handhaben (z. B. keine Optimierungsfunktion)
- für „natürliche“ Probleme sind die Ressourcen, die für Entscheidungs- / Berechnungs- / Optimierungsproblem benötigt werden, sehr ähnlich.

Beispiel: polynomielle Algorithmen für das Cliquenproblem (hypothetisch!)

1. Optimierungsproblem polynomiell $\Rightarrow$ Entscheidungsproblem polynomiell

Eingabe Entscheidungsproblem: Graph G, Cliquengröße k

Algorithmus für Optimierungsproblem liefert in Polyzeit größte Clique C

G hat k-Clique gdw. $|C| \geq k$

Varianten algorithmischer Probleme

2. Entscheidungsproblem polynomiell ⇒ Berechnungsproblem polynomiell

Eingabe Berechnungsproblem: Graph G, Cliquengröße k

Zunächst entscheiden wir in Polyzeit, ob G eine k-Clique enthält und geben $\perp$ aus, wenn das nicht der Fall ist.

Algorithmus

Function `b-clique`(G, k)**:**

- $G' := G$
- **while** G' *enthält* k*-Clique* **do**
  - wähle Knoten $v \in V$
  - entferne v aus G'
- **Ausgabe** v % letzter entfernter Knoten ist Teil der berechneten Clique
- entferne alle Knoten aus G', die in G nicht adjazent zu v sind
- **if** $k = 1$ **then stop**
- `b-clique`$(G', k-1)$

T1.10

Varianten algorithmischer Probleme

3. Berechnungsproblem polynomiell $\Rightarrow$ Optimierungsproblem polynomiell

Eingabe Optimierungsproblem: Graph G

Berechne Cliquen für alle $k = 1, \ldots, |V|$.
Sobald $\perp$ zurückgegeben wird, wurde max. Clique gefunden

Polynomiell, da nur polynomiell viele Aufrufe des polynomiellen Berechnungsproblems notwendig sind.

Für andere Probleme ist hier oft binäre Suche erforderlich.
(wenn eine binär kodierte Zahl die Eingabe ist, deren Wert nicht von einer anderen Eingabe dominiert wird)

Übersicht Vorlesung

Kapitel 1: Einführung

Kapitel 2: Turingmaschinen

Kapitel 3: P vs. NP

Kapitel 4: Mehr Ressourcen, mehr Möglichkeiten?

Kapitel 5: Platzkomplexität

Kapitel 6: Schaltkreise

Kapitel 7: Orakel