

Komplexitätstheorie

Übungsblatt 2

Abgabe als PDF bis **Mi. 1.5.2019, 23:59 Uhr** in Stud.IP, Ordner „Abgabe Übungsblatt 2“

Bitte nur eine PDF-Datei pro Gruppe, Lizenz „Selbst verfasstes, nicht publiziertes Werk“.

1. (25 %)

- a) Das Problem *2-Färbbarkeit* (2F) für ungerichtete Graphen ist analog zu 3-Färbbarkeit definiert, nur mit zwei statt mit drei Farben. Zeige, dass $2F \in P$.
- b) Eine Formel φ in Klauselform heißt *Spezialformel*, wenn jede Variable höchstens zwei Mal in φ vorkommt, wobei sowohl positive als auch negative Vorkommen gezählt werden. Sei SpSAT die Menge aller erfüllbaren Spezialformeln. Zeige, dass $\text{SpSAT} \in P$.

Hinweis: Eliminiere wiederholt Variablen, die mehrfach in der Eingabeformel auftauchen, so dass sich die (Un)Erfüllbarkeit der Formel erhält.

Man kann auch zeigen, dass 2SAT (die Menge aller erfüllbaren 2-Formeln) in P ist, was wir hier aber nicht tun wollen.

- #### 2. (20 %)
- Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA) heißt *azyklisch* (ANEA), wenn seine Übergangsrelation azyklisch ist, d. h. es gibt keine Folge a_0, \dots, a_{n-1} von Symbolen und q_0, \dots, q_n von Zuständen, so dass $q_0 = q_n$ und

$$(q_i, a_i, q_{i+1}) \in \Delta \quad \text{für alle } i < n.$$

Beweise durch Angeben eines polynomiellen Beweissystems, dass das folgende Problem in NP ist: Gegeben ANEAs \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 , gilt $L(\mathcal{A}_1) \not\subseteq L(\mathcal{A}_2)$?

- #### 3. (25 %)
- Für eine Sprache L ist $L^0 = \{\varepsilon\}$, $L^{i+1} = L^i \cdot L$ für alle $i \geq 0$ und $L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$.
Beweise:

- a) Wenn $L \in \text{NP}$, dann $L^* \in \text{NP}$.
- b) Wenn $L \in P$, dann $L^* \in P$.

Es genügt, Algorithmen in Pseudocode (und nicht als TM) anzugeben und ihre Korrektheit zu begründen sowie die Laufzeit zu analysieren.

Hinweis: Für b) hilft dynamische Programmierung.

- #### 4. (10 %)
- Beweise mithilfe der Resultate aus der Vorlesung:

Wenn $P = \text{NP}$, dann ist jedes nichttriviale NP-Problem auch NP-vollständig.

(Ein Problem $L \subseteq \Sigma^*$ heißt nichttrivial, wenn $L \neq \emptyset$ und $L \neq \Sigma^*$.)

- #### 5. (20 %)
- Beweise durch Reduktion von 3SAT, dass IPROG NP-hart ist (beachte die Hinweise auf Folie 40 in Kapitel 3).

Zur Erinnerung: IPROG lässt nur *Gleichungen* bestimmter Form zu (siehe Folie 11). Möchte man z. B. auch „ \leq “ und „ \geq “ verwenden, so muss man dies vorher unter Verwendung von „ $=$ “ als Abkürzung definieren.

Bitte wenden.

- 6. Zusatzaufgabe (20%)** Sei φ eine AL-Formel in KNF. Eine \neq -Wertzuweisung (\neq -WZ) für die Variablen in φ ist eine Wertzuweisung, so dass jede Klausel in φ mindestens zwei Literale mit ungleichen Wahrheitswerten enthält. Mit anderen Worten: eine \neq -WZ erfüllt φ ohne in irgendeiner Klausel alle drei Literale wahr zu machen. Sei $\neq 3SAT$ die Menge aller 3-Formeln, für die es eine \neq -WZ gibt. Beweise, dass $\neq 3SAT$ NP-vollständig ist.

Hinweis: Für die NP-Härte verwende eine Reduktion von $3SAT$, die jede 3-Klausel in zwei 3-Klauseln umwandelt. Um die Korrektheit der Reduktion zu beweisen, hilft es wahrscheinlich, folgende Beobachtung auszunutzen: wenn man die Wahrheitswerte einer \neq -WZ für eine AL-Formel φ vertauscht (wahr durch falsch, falsch durch wahr), erhält man wieder eine \neq -WZ für φ .