AG Theorie der künstlichen Intelligenz
FB Mathematik und Informatik, Universität Bremen
Prof. Dr. Carsten Lutz

MZH 3090
clu@uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-64431

1. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Logik“

Aufgabe 1: 25 Prozent

Wir betrachten das Auswertungsproblem der Aussagenlogik.

(a) Gib einen möglichst effizienten Algorithmus (in Pseudocode) zum Auswerten von aussagenlogischen Formeln an. Orientiere dich an den Hinweisen aus der Vorlesung.

(b) Dokumentiere die Arbeitsweise deines Algorithmus anhand der folgenden Formel F und Belegung V:

$$F = \neg(x_1 \vee \neg(x_2 \wedge x_3))$$

$$V(x_1) = 0, V(x_2) = 1, V(x_3) = 1$$

(c) Zeige, dass der Algorithmus auf jeder Eingabe in Polynomialzeit läuft!

(d) Wie groß ist der Speicherplatzbedarf des Algorithmus?

Aufgabe 2: 25 Prozent

Zeige durch Anwenden der in der Vorlesung eingeführten Äquivalenzen, dass die folgenden Äquivalenzen gelten. Gib für jeden Schritt die angewandte Regel an.

(a) $(x \vee y) \wedge (\neg x \vee y) \equiv y$

(b) $\neg((\neg x \vee y) \wedge x) \equiv \neg x \vee \neg y$

(c) $0 \wedge x \equiv 0$ und $1 \vee x \equiv 1$

Aufgabe 3: 25 Prozent

Gegeben sei die folgende 3-stellige Boolesche Funktion f:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_2 & \text{falls } x_1 = 1 \\ x_3 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1)$$

(a) Zeige, dass die Menge $M := \{f, 0, 1\}$ funktional vollständig ist.

(b) Zeige, dass jede echte Teilmenge $M' \subset M$ nicht funktional vollständig ist.

(c) Gib eine aussagenlogische Formel für f in disjunktiver Normalform an.

Aufgabe 4: 25 Prozent

Johanna und Joel haben fünf Kinder: Anna, Bert, Chris, David und Eva. Gegeben sind die 6 folgenden Aussagen:

1. Eva sagt: "Unter den Personen Anna, Chris und David befindet sich mindestens ein Lügner."
2. Anna sagt: "Bert lügt nur dann, wenn David die Wahrheit sagt."
3. Bert sagt: "Wenn Chris nicht lügt, dann ist entweder Anna oder David ein Lügner."
4. Chris sagt: "Eva lügt, und auch Anna oder Bert lügen."
5. David sagt: "Wenn Bert die Wahrheit sagt, dann auch Anna oder Chris."
6. Zwei der Kinder lügen immer, die anderen drei sagen immer die Wahrheit.

Aus der Rätselbeschreibung kann man bereits eindeutig feststellen, wer von den Kindern die Lügner sind. Wir wollen das Rätsel hier mit Hilfe von Aussagenlogik lösen.

(a) Gib aussagenlogische Formeln $F_1, \ldots, F_6$ an, die die beschriebene Situation modellieren (für jede Aussage eine Formel)! Verwende für jedes Kind eine aussagenlogische Variable, die angibt, ob das entsprechende Kind lügt, d.h. eine Variable "x_a" für die Aussage "Anna ist eine Lügnerin".

Hinweis: Die Aussage "Anna sagt, dass Bert ein Lügner ist" kann durch folgende aussagenlogische Formel beschrieben werden:

$$(x_a \to \neg x_b) \wedge (\neg x_a \to x_b)$$

(b) Wieviele Modelle hat die Formel F_6? Gib alle an!

(c) Gib eine Belegung V an, die alle Formeln $F_1, \ldots, F_6$ zu 1 auswertet! In welcher Beziehung steht V zu der Lösung des Rätsels?

(d) Gibt es weitere Belegungen, die alle Formeln zu 1 auswerten? Was folgt daraus über die Eindeutigkeit der Lösung?

Aufgabe 5: 25 Prozent (Zusatzaufgabe)

Beweise das *aussagenlogische Interpolationslemma*: Sei $\varphi \to \psi$ eine aussagenlogische Tautologie. Dann gibt es eine Formel θ, so dass folgendes erfüllt ist:

- Sowohl $\varphi \to \theta$ als auch $\theta \to \psi$ ist eine Tautologie.
- $\mathrm{Var}(\theta) \subseteq \mathrm{Var}(\varphi) \cap \mathrm{Var}(\psi)$

Hinweis für den Beweis: Verwende als θ eine Formel in disjunktiver Normalform, die alle Modelle von φ beschreibt, ohne die Variablen in $\mathrm{Var}(\varphi) \setminus \mathrm{Var}(\psi)$ zu beachten.