AG Theorie der künstlichen Intelligenz
FB Mathematik und Informatik, Universität Bremen
Prof. Dr. Carsten Lutz

MZH 3090
clu@uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-64431

3. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Logik“

Aufgabe 11: 25 Prozent

Sei $\tau = \{<\}$ eine relationale Signatur, wobei $<$ ein zweistelliges Relationssymbol ist. Gib jeweils eine FO(τ)-Formel für die folgenden Eigenschaften an.

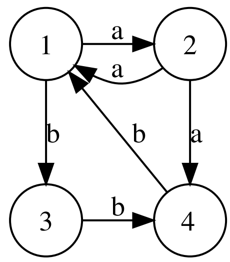
- $<$ ist reflexiv
- $<$ ist antisymmetrisch
- $<$ hat ein kleinstes Element
- $<$ ist *linear*, d.h. für beliebige Elemente a, b gilt entweder $a = b$, $a < b$, oder $a > b$.
- $<$ ist *dicht*, d.h. zwischen zwei beliebigen Elemente existiert immer noch ein weiteres

(a) Welche der Sätze sind gültig in den Strukturen $\mathfrak{R}_<$ bzw. $\mathfrak{N}_<$ (aus der Vorlesung)?

(b) Sei nun $\mathfrak{P} = (P, <^P)$ mit $P = 2^{\mathbb{N}}$ (Potenzmenge der natürlichen Zahlen) und $<^P = \{(N, M) \mid N \subseteq M\}$ (Teilmengenrelation). Welche der Sätze gelten in $\mathfrak{P}$? Gib jeweils eine kurze Begründung an.

Aufgabe 12: 25 Prozent

Gegeben sei der folgende gerichtete, kantenbeschriftete Graph $G = (V, R, S)$, wobei R (bzw. S) genau die Kanten sind, die mit a (bzw. b) beschriftet sind.



(a) Verwende den Auswertungsalgorithmus der Prädikatenlogik, um zu entscheiden, ob folgende Modellbeziehungen gelten:

- $G, \beta_1 \models \exists x.R(x, y)$ mit $\beta_1(y) = 1$
- $G, \beta_2 \models \forall y.(R(x, y) \vee S(x, y))$ mit $\beta_2(x) = 2$

(b) Gib eine Formel $\varphi(x)$ an, für die $G, \beta \models \varphi(x)$ genau dann gilt, falls $\beta(x) \in \{1, 2\}$

Aufgabe 13: 25 Prozent

(a) Beweise durch Umformung mittels bekannter Äquivalenzen oder widerlege durch Angabe eines Gegebeispiels:

- $\forall x.(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x.\varphi \vee \forall x.\psi$
- $\neg\exists x.(\exists y.\neg\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x.(\psi \rightarrow \forall y.\varphi)$ (Beachte die Präzedenzregeln für $\exists$ und $\wedge$.)
- $\forall x.\exists y.\varphi \equiv \exists y.\forall x.\varphi$

(b) Bringe die folgende Formel zuerst in Negationsnormalform und dann in Pränexnormalform.

$$\neg\exists y.(\neg R(f(x), y) \wedge \forall x.R(x, x))$$

Aufgabe 14: 25 Prozent

Vervollständige den Beweis des Theorems von Folie 59 (aktuelle Version der Folien), indem du zeigst, dass für alle τ-Formeln φ und für alle Zuweisungen β gilt:

$$\mathfrak{A}, \beta \models \varphi \text{ gdw. } \hat{\mathfrak{A}}, \hat{\beta} \models \varphi$$

Verwende strukturelle Induktion über den Aufbau der Formeln.

Aufgabe 15: 25 Prozent (Zusatzaufgabe)

Das Spektrum eines FO(τ)-Satzes φ ist die Menge aller natürlichen Zahlen n, sodass φ ein Modell mit einem Universum der Größe n besitzt.

(a) Zeige:

- $\emptyset$ und $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ sind jeweils das Spektrum eines FO($\emptyset$)-Satzes
- Jede endliche Menge ist Spektrum eines FO($\emptyset$)-Satzes.
- Jede co-endliche Menge ist Spektrum eines FO($\emptyset$)-Satzes (A co-endlich gdw. $\mathbb{N} \setminus A$ endlich)

(b) Gib einen Satz über der Signatur $\tau = \{R\}$, wobei R ein zweistelliges Relationssymbol ist, an, dessen Spektrum die Menge der geraden Zahlen ist.