AG Theorie der künstlichen Intelligenz
FB Mathematik und Informatik, Universität Bremen
Prof. Dr. Carsten Lutz

MZH 3090
clu@uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-64431

4. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Logik“

Aufgabe 16: 25 Prozent

Wir betrachten eine Datenbank mit den Relationen “Film”, “Schauspieler” und “Programm”. Dabei soll Film die Attribute (Name, Jahr, Regisseur) haben, Schauspieler die Attribute (Film, Schauspieler) und Programm die Attribute (Film, Kino, Uhrzeit). Eine Beispielinstanz dieser Signatur ist hier zu sehen:

Name	Jahr	Regisseur
The Social Network	2010	David Fincher
...		

Film	Schauspieler
The Social Network	Jesse Eisenberg
The Social Network	Justin Timberlake
...	

Film	Kino	Uhrzeit
The Social Network	Cinemaxx	16:00
The Social Network	Schauburg	20:15
...		

Formuliere FO-Formeln (mit freien Variablen), die folgende Antwortmengen liefern:

(a) Regisseure, die auch Schauspieler sind.

(b) Regisseure, die in ihren eigenen Filmen mitgespielt haben.

(c) Filme, die in mindestens zwei Kinos gezeigt werden.

(d) die Regisseure von “The Social Network”

(e) alle Filme, die im Cinemaxx gezeigt werden und deren Regisseur David Fincher ist oder in denen Jesse Eisenberg mitspielt.

Formuliere zusätzlich einen FO-Satz, der genau dann zu 1 auswertet, wenn es ein Kino gibt, das sowohl einen Film von Hitchcock als auch einen Film von Spielberg zeigt.

Aufgabe 17: 25 Prozent

Beweise oder widerlege:

(a) Wenn T_1 und T_2 FO-Theorien sind, dann ist auch $T_1 \cup T_2$ eine FO-Theorie.

(b) Wenn T_1 und T_2 FO-Theorien sind, dann ist auch $T_1 \cap T_2$ eine FO-Theorie.

(c) Wenn T eine FO-Theorie ist, dann ist auch $\{\neg\varphi \mid \varphi \in T\}$ eine FO-Theorie.

(d) Wenn T eine vollständige Theorie ist, dann ist $\varphi \vee \psi \in T$ genau dann, wenn $\varphi \in T$ oder $\psi \in T$.

(e) Sei T eine beliebige FO-Theorie. Dann gilt $\forall x.x = x \in T$.

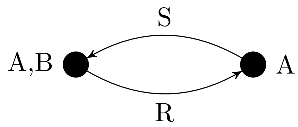
Aufgabe 18: 25 Prozent

Beweise, dass für jede endliche Struktur $\mathfrak{A}$ über einer Signatur τ die FO-Theorie $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ endlich axiomatisierbar ist.

Hinweis: Verallgemeinere das folgende Beispiel. Für die abgebildete τ-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\tau = \{R, S, A, B\}$ wobei R,S zweistellige und A,B einstellige Relationssymbole sind definiert man die FO-Formel $\varphi_{\mathfrak{A}}$ als

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathfrak{A}} = \exists x_1.\exists x_2.(x_1 \neq x_2 \wedge \forall x.(x = x_1 \vee x = x_2)\wedge\\ A(x_1) \wedge B(x_1) \wedge A(x_2) \wedge \neg B(x_2)\wedge\\ R(x_1, x_2) \wedge \neg R(x_1, x_1) \wedge \neg R(x_2, x_2) \wedge \neg R(x_2, x_1)\wedge\\ S(x_2, x_1) \wedge \neg S(x_1, x_1) \wedge \neg S(x_2, x_2) \wedge \neg S(x_1, x_2))\end{aligned}$$

$\mathfrak{A}$:



Die Formel $\varphi_{\mathfrak{A}}$ hat (bis auf Isomorphie) nur ein Modell und die Menge $\{\varphi_{\mathfrak{A}}\}$ ist eine endliche Axiomatisierung von $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$.

Aufgabe 19: 25 Prozent

(a) Gib jeweils einen SK-Beweis für die folgenden Sequenzen an:

  (i) $\varphi, (\psi \vee \vartheta) \Rightarrow (\varphi \wedge \psi), (\varphi \wedge \vartheta)$

  (ii) $(\varphi_1 \vee \neg\psi), (\varphi_2 \vee \psi) \Rightarrow \varphi_1, \varphi_2$

  (iii) $\forall y.(\neg R(a, y) \vee R(a, f(y))), R(a, a) \Rightarrow R(a, f(f(a)))$

(b) Zeige, dass für die Korrektheit der Regel ($\exists \Rightarrow$) die Bedingung "c nicht in $\Gamma, \Delta, \varphi(x)$" wichtig ist. Gib dafür einen SK-Beweis einer *nicht* gültigen Sequenz an, der die Regel ($\exists \Rightarrow$) anwendet, ohne auf die Bedingung zu achten.

Aufgabe 20: 25 Prozent (Zusatzaufgabe)

Eine Signatur heißt *algebraisch*, falls sie nur Funktionssymbole (und keine Relationssymbole) enthält. Zeige, dass das Erfüllbarkeitsproblem auch auf algebraischen Signaturen unentscheidbar ist, indem du die folgende Behauptung beweist:

Jede FO-Formel φ kann in eine FO-Formel φ' ohne Relationssymbole umgeformt werden, sodass φ' genau dann erfüllbar ist, wenn φ erfüllbar ist.