AG Theorie der künstlichen Intelligenz
FB Mathematik und Informatik, Universität Bremen
Prof. Dr. Carsten Lutz

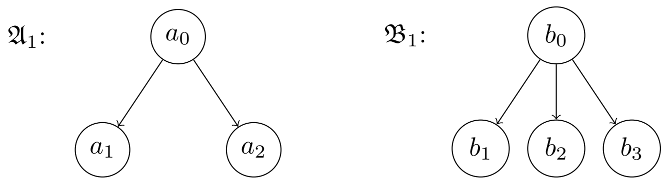
MZH 3090
clu@uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-64431

6. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Logik“

Aufgabe 26: 33 Prozent

Gib für die folgenden Strukturen $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ das kleinste k an, so dass Spoiler eine Gewinnstrategie in k Zügen hat. Gib sowohl die Gewinnstrategie an, als auch einen Satz φ mit $\mathrm{qr}(\varphi) = k$, der in der einen Struktur gilt und in der anderen nicht.

(a)



(b) $\mathfrak{A}_2 = (2^{\mathbb{N}}, \subseteq)$ und $\mathfrak{B}_2 = (2^{\{0,1\}}, \subseteq)$ (gemeint sind jeweils die Potenzmengen)

(c) $\mathfrak{A}_3 = (\mathbb{Z}, <)$ und $\mathfrak{B}_3 = (\mathbb{R}, <)$.

Aufgabe 27: 33 Prozent

Wir betrachten EF-Spiele auf Strukturen mit einer linearen Ordnung $<$.

(a) Zeige, dass der Duplikator auf den Strukturen $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, <)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, <)$ für alle $k \geq 0$ eine Gewinnstrategie für $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat. (Tipp: Verwende, dass beide Ordnungen dicht sind.)

(b) Zeige, dass der Duplikator für die Strukturen $\mathfrak{A} = ((0, 1), <)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, <)$ für alle $k \geq 0$ eine Gewinnstrategie für $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat.

(c) Zeige, dass für das Spiel $\mathcal{G}_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ auf den Strukturen $\mathfrak{A} = ([0, 1], <)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, <)$ eine Gewinnstrategie für den Spoiler existiert.

Verwende die oben gezeigten Eigenschaften, um zu beweisen:

(d) $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$ für $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, <)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, <)$.

Hinweis: (a, b) bezeichnet das offene Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ während $[a, b]$ das abgeschlossene Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Aufgabe 28: 33 Prozent

Gib für die folgenden Aussagen $\mathrm{SO}(\tau)$-Sätze an.

(a) Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist *bipartit*, d.h. es gibt eine Partition der Ecken $V = V_1 \cup V_2$, sodass es keine Kante innerhalb von V_1 und keine Kante innerhalb von V_2 gibt. Verwende $\tau = \{E\}$.

(b) P und Q haben dieselbe Mächtigkeit, d.h. es gibt eine bijektive Abbildung zwischen P und Q. Verwende $\tau = \{P, Q\}$, wobei P und Q einstellige Relationssymbole sind.

(c) Die Mächtigkeit des Universums $|A|$ ist durch 3 teilbar. Verwende die leere Signatur.

Aufgabe 29: 25 Prozent (Zusatzaufgabe)

Wir wollen zeigen, dass die Struktur der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit 0 und der Nachfolgerfunktion nf in SO definierbar sind. Dafür betrachten wir die Formelmenge $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ mit

$$\varphi_1 = \forall x.0 \neq \mathrm{nf}(x)$$

$$\varphi_2 = \forall x, y.(\mathrm{nf}(x) = \mathrm{nf}(y) \to x = y)$$

$$\varphi_3 = \forall X.(X(0) \wedge (\forall x.(X(x) \to X(\mathrm{nf}(x)))) \to \forall x.X(x))$$

Man überzeugt sich leicht, dass $(\mathbb{N}, \mathrm{nf}, 0) \models \Gamma$.

(a) Sei nun $\mathfrak{A}$ ein Modell für Γ. Wir definieren eine Funktion $h : \mathbb{N} \to A$ folgendermaßen.

$$h(n) = \begin{cases} 0^{\mathfrak{A}} & n = 0 \\ \mathrm{nf}^{\mathfrak{A}}(h(n-1)) & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeige, dass aus $\mathfrak{A} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ folgt, dass $h(n) \neq h(m)$ für $n \neq m$.

(b) Nun sei $B = \{h(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ das Bild von h. Verwende φ_3 um zu zeigen, dass $B = A$ ist.

(c) Schlussfolgere aus dem bisher Gezeigten, dass h ein Isomorphismus von $(\mathbb{N}, \mathrm{nf}, 0)$ nach $\mathfrak{A}$ ist.

Gib basierend auf 0 und nf auch Definitionen für $+$ und $*$ an.