AG Theorie der künstlichen Intelligenz
FB Mathematik und Informatik, Universität Bremen
Prof. Dr. Carsten Lutz

Cartesium 2.59
clu@uni-bremen.de
Tel. 0421/218-64431

Logik
Aufgabenblatt 1

Besprechung und Abgabe: Di., 29.10.2013

Aufgabe 1 (*28 Prozent*)

Johanna und Joel haben fünf Kinder: Anna, Bert, Chris, David und Eva. Gegeben sind die sechs folgenden Aussagen:

1. Eva sagt: "Unter Anna, Chris und David befindet sich mindestens ein Lügner."
2. Anna sagt: "Bert lügt nur dann, wenn David die Wahrheit sagt."
3. Bert sagt: "Wenn Chris nicht lügt, dann ist entweder Anna oder David ein Lügner."
4. Chris sagt: "Eva lügt, und auch Anna oder Bert lügen."
5. David sagt: "Wenn Bert die Wahrheit sagt, dann auch Anna oder Chris."
6. Zwei der Kinder lügen immer, die anderen drei sagen immer die Wahrheit.

Wir wollen das Rätsel hier mit Hilfe von Aussagenlogik lösen.

a) Gib aussagenlogische Formeln $\varphi_1, ..., \varphi_6$ an, die die beschriebene Situation modellieren (für jede Aussage eine Formel)! Verwende für jedes Kind eine aussagenlogische Variable, die angibt, ob das entsprechende Kind lügt, d.h. eine Variable x_a für die Aussage "Anna ist eine Lügnerin".

   Hinweis: Die Aussage "Anna sagt, dass Bert ein Lügner ist" kann dann durch folgende aussagenlogische Formel beschrieben werden:

$$(x_a \rightarrow \neg x_b) \wedge (\neg x_a \rightarrow x_b)$$

b) Wieviele erfüllende Belegungen hat die Formel φ_6? Gib alle an!

c) Gib eine Belegung V an, die alle Formeln $\varphi_1, \dots, \varphi_6$ erfüllt! In welcher Beziehung steht V zur Lösung des Rätsels?

d) Gibt es weitere Belegungen, die alle Formeln erfüllen? Was folgt daraus über die Eindeutigkeit der Lösung?

Aufgabe 2 *(24 Prozent)*

Wir betrachten das Auswertungsproblem der Aussagenlogik.

1. Gib einen möglichst effizienten Algorithmus (in Pseudocode) zum Auswerten von aussagenlogischen Formeln an. Orientiere dich an den Hinweisen aus der Vorlesung.
2. Dokumentiere die Arbeitsweise deines Algorithmus anhand der folgenden Formel φ und Belegung V:
$$\varphi = \neg(x_1 \vee \neg(x_2 \wedge x_3))$$
$$V(x_1) = 0,\ V(x_2) = 1,\ V(x_3) = 1$$
3. Argumentiere, dass der Algorithmus auf jeder Eingabe in Polynomialzeit läuft!

Aufgabe 3 *(24 Prozent)*

Zeige durch Anwenden der in der Vorlesung eingeführten Äquivalenzen, dass auch die folgenden Äquivalenzen gelten. Gib für jeden Schritt die angewandte Regel an.

1. $(x \vee y) \wedge (\neg x \vee y) \equiv y$
2. $\neg((\neg x \vee y) \wedge x) \equiv \neg x \vee \neg y$
3. $0 \wedge x \equiv 0$ und $1 \vee x \equiv 1$

Aufgabe 4 *(24 Prozent)*

Gegeben sei die folgende 3-stellige Boolesche Funktion f mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_2 & \text{falls } x_1 = 1 \\ x_3 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Gib eine aussagenlogische Formel für f in disjunktiver Normalform an.
2. Sei $M = \{f, 0, 1\}$. Zeige, dass M funktional vollständig ist.
3. Zeige, dass jede echte Teilmenge $M' \subset M$ nicht funktional vollständig ist.

Aufgabe 5 *(24 Prozent, Zusatzaufgabe)*

Jedem Wort $w = a_1 \cdots a_n$ der Länge n über dem Alphabet $\Sigma = \{0,1\}$ ordnen wir eine Belegung $V_w \colon \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{0,1\}$ durch die Vorschrift $V_w(x_i) = 1$ gdw. $a_i = 1$ zu. Eine Formel φ *axiomatisiert* die Menge aller Wörter $w \in \{0,1\}^n$ mit $V_w \models \varphi$.

1. Beschreibe die durch die Formel $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_3)$ axiomatisierte Menge von Wörtern (für $n = 3$).
2. Gib eine Formel φ an, die das Wort $(01)^3$ axiomatisiert.
3. Gib für $n \geq 1$ eine Formel φ_n an, die die Menge aller Wörter der Länge n axiomatisiert, die nicht das Infix 000 enthalten.