AG Theorie der künstlichen Intelligenz
FB Mathematik und Informatik, Universität Bremen
Prof. Dr. Carsten Lutz

Cartesium 2.59
clu@uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-64431

5. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Logik“

Aufgabe 16: 50%

(a) Gib jeweils einen SK-Beweis für die folgenden Sequenzen an:

(i) $\varphi, (\psi \vee \vartheta) \Rightarrow (\varphi \wedge \psi), (\varphi \wedge \vartheta)$

(ii) $(\varphi_1 \vee \neg\psi), (\varphi_2 \vee \psi) \Rightarrow \varphi_1, \varphi_2$

(iii) $\forall y\ (\neg R(a,y) \vee R(a, f(y))), R(a,a) \Rightarrow R(a, f(f(a)))$

(b) Zeige, dass für die Korrektheit der Regel ($\Rightarrow \forall$) die Bedingung "c nicht in $\Gamma, \Delta, \varphi(x)$" wichtig ist. Gib dafür einen SK-Beweis einer *nicht* gültigen Sequenz an, der die Regel ($\Rightarrow \forall$) anwendet, ohne auf die Bedingung zu achten.

Aufgabe 17: 50%

Man kann den Sequenzenkalkül um zusätzliche Regeln erweitern, die es erlauben, Beweise abzukürzen. Die neuen Regeln müssen natürlich korrekt sein, um die Korrektheit des Kalküls nicht zu zerströren. Entscheide, ob die folgenden Regeln korrekt sind. Falls ja, gib einen Beweis ähnlich wie im Korrektheitsbeweis des SK an. Falls die Regel nicht korrekt ist, gib die Ableitung einer nicht gültigen Sequenz als Gegenbeispiel an.

(a) $\dfrac{\Gamma, \varphi_1 \Rightarrow \psi_1 \quad \Gamma, \varphi_2 \Rightarrow \psi_2}{\Gamma, \varphi_1 \vee \varphi_2 \Rightarrow \psi_1 \vee \psi_2}$

(b) $\dfrac{\Gamma, \varphi_1 \Rightarrow \psi_1 \quad \Gamma, \varphi_2 \Rightarrow \psi_2}{\Gamma, \varphi_1 \vee \varphi_2 \Rightarrow \psi_1 \wedge \psi_2}$

(c) $\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \psi \quad \Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \neg\psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi}$

(d) $\dfrac{\Gamma, \exists x\, \psi(x) \Rightarrow \Delta, \forall x\, \varphi(x)}{\Gamma, \forall x\, \psi(x) \Rightarrow \Delta, \exists x\, .\varphi(x)}$

Aufgabe 18: 20% (Zusatzaufgabe)

Offensichtlich sind die FO-Sätze

(a) $\exists x\, P(x) \rightarrow \forall y\, P(y)$

(b) $\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(f(x)) \rightarrow \exists y\, \neg(P(y) \wedge Q(y))$

keine Tautologien. Aus dem Vollständigkeitssatz des SK folgt, dass die Sequenzen

(a) $\{\exists x\, P(x)\} \Rightarrow \{\neg\exists y\, \neg P(y)\}$

(b) $\{\exists x\, P(x), \exists x\, Q(f(x))\} \Rightarrow \{\exists y\, \neg(P(y) \wedge Q(y))\}$

nicht ableitbar sind. Gib jeweils die im Beweis des Vollständigkeitssatzes konstruierte Herbrandstruktur $\mathfrak{H}$ an (dazu müssen zunächst die Mengen Γ^* und Δ^* konstruiert werden) und argumentiere, dass $\mathfrak{H}$ kein Modell des Satzes ist.