AG Theorie der künstlichen Intelligenz
FB Mathematik und Informatik, Universität Bremen
Prof. Dr. Carsten Lutz

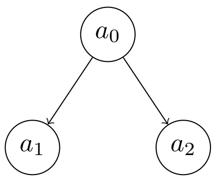
Cartesium 2.59
clu@uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-64431

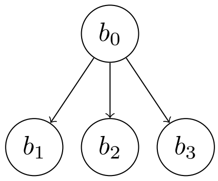
6. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Logik“

Aufgabe 1: 21%

Gib für die folgenden Strukturen $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ das kleinste k an, so dass Spoiler eine Gewinnstrategie in k Zügen hat. Gib sowohl die Gewinnstrategie an, als auch einen Satz φ mit $\mathrm{qr}(\varphi) = k$, der in der einen Struktur gilt und in der anderen nicht.

(a)

$\mathfrak{A}_1$: 

$\mathfrak{B}_1$: 

(b) $\mathfrak{A}_2 = (2^{\mathbb{N}}, \subseteq)$ und $\mathfrak{B}_2 = (2^{\{0,1\}}, \subseteq)$ (gemeint sind jeweils die Potenzmengen)

(c) $\mathfrak{A}_3 = (\mathbb{Z}, <)$ und $\mathfrak{B}_3 = (\mathbb{R}, <)$.

Aufgabe 2: 21%

Gib für die folgenden Eigenschaften definierende SO-Sätze an. Die Signatur ist jeweils $\tau = \{E\}$ mit E binärem Relationssymbol, das die Kanten im Graph beschreibt. Es darf angenommen werden, dass E in allen betrachteten Strukturen eine symmetrische Relation ist (was der Ungerichtetheit der Graphen entspicht).

(a) 3-Färbbarkeit

(b) Azyklizität

(c) Planarität

Hinweis: Für Teilaufgabe (c) ist der Satz von Kuratowski hilfreich (siehe z.B. Wikipedia)

Aufgabe 3: 21%

Gib für die folgenden Sprachen $L \subseteq \Sigma_1^*$ mit $\Sigma_1 = \{0, 1\}$ jeweils einen MSO-Satz φ an, so dass $L = L(\varphi)$.

(a) 0^*1^*

(b) $\{w \mid |w|_0 = 2n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$

(c) $(01^+)^*$

(d) $(001)^*$

Hinweis: $|w|_0$ bezeichnet die Anzahl der Vorkommen des Symbols 0 im Wort w.

Aufgabe 4: 21%

(a) Bringe den folgenden S1S-Satz in die Normalform aus dem Beweis des Theorems von Büchi-Elgot-Trakhtenbrot.

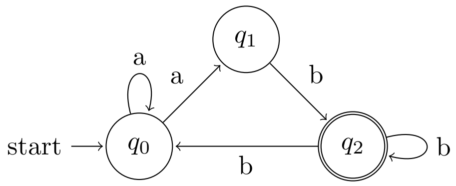
$$\forall x.(x > 0 \to (P_1(x)))$$

(b) Konstruiere den endlichen Automaten A_φ für

$$P_1 \subseteq P_2 \wedge \exists X.(P_1 \subseteq X \wedge succ(X) = P_2)$$

und gib $L(A_\varphi)$ an. Verwende als Kodierung $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = a$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = b$, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = c$ und $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = d$.

(c) Gib für den folgenden nichtdeterministischen endlichen Automaten $\mathfrak{A}$ die entsprechende MSO-Formel aus dem Beweis des Theorems von Büchi-Elgot-Trakhtenbrot an.



Aufgabe 5: 16%

Entscheide für die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\{a, b\}$, ob sie sternfrei sind. Falls ja, gib eine sternfreie Beschreibung an. Ansonsten begründe kurz.

(a) $(a + b)^*b(a + b)^*$

(b) a^*

(c) $(aa)^*$

(d) $(ab^+)^*$

Aufgabe 6: 20% (Zusatzaufgabe)

Full-S1S bezeichne die Erweiterung von S1S um Quantifizierung über Relationsvariablen beliebiger Stelligkeit. Zeige:

(a) Es gibt einen Full-S1S Satz φ mit $L(\varphi) = \{0^n1^n \mid n \geq 0\}$.

(b) Für jede kontextfreie Sprache S über dem Alphabet $\{0, 1\}$ gibt es einen Full-S1S Satz φ_S mit $L(\varphi_S) = S$.

Hinweis zu Teilaufgabe 2: use Chomsky-Normalform, Luke!