AG Theorie der künstlichen Intelligenz
FB Mathematik und Informatik, Universität Bremen
Prof. Dr. Carsten Lutz

Cartesium 2.59
clu@uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-64431

3. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Komplexitätstheorie“

Aufgabe 1: 24%

(a) Das Problem *2-Färbbarkeit (2F)* für ungerichtete Graphen sei analog zu 3-Färbbarkeit definiert, nur mit zwei statt mit drei Farben. Zeige, dass 2F $\in \mathsf{P}$.

(b) Eine Formel φ in Klauselform heisst *Spezialformel*, wenn jede Variable höchstens zwei mal in φ vorkommt, wobei sowohl positive als auch negative Vorkommen gezählt werden. Sei SpSAT die Menge aller erfüllbaren Spezialformeln. Zeige, dass SpSAT $\in \mathsf{P}$.

Man kann auch zeigen, dass 2SAT (die Menge aller erfüllbaren 2-Formeln) in P ist, was wir hier aber nicht tun wollen.

Aufgabe 2: 25%

Beweise oder widerlege:

(a) Wenn eine nicht-triviale endliche Menge NP-vollständig ist, dann $\mathsf{P} = \mathrm{NP}$;

(b) Wenn $\mathsf{P} = \mathrm{NP}$, dann ist jedes nicht-triviale $L \in \mathrm{NP}$ auch NP-vollständig;

(c) Wenn $\mathsf{P} = \mathrm{NP}$, dann ist jedes triviale $L \in \mathrm{NP}$ auch NP-vollständig;

(d) $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{coNP}$ gdw. $\mathrm{NP} = \mathrm{coNP}$.

(e) Für jedes feste k ist das Problem k-CLIQUE (gegeben ein Graph, enthält er eine Clique der Größe k?) als Constraint Satisfaction Problem darstellbar.

Zur Erinnerung: die *trivialen Mengen* sind $\emptyset$ und Σ^*.

Aufgabe 3: 26%

Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Eine *Paddingfunktion für* L ist eine Funktion $\mathsf{pad} : (\Sigma^* \times \Gamma^*) \to \Sigma^*$ (mit Γ beliebig) so dass gilt:

1. $\mathsf{pad}(x, y)$ kann in polynomieller Zeit berechnet werden
2. für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt $\mathsf{pad}(x, y) \in L$ gdw. $x \in L$
3. für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt $|\mathsf{pad}(x, y)| > |x| + |y|$
4. Gegeben $\mathsf{pad}(x, y)$ kann y in polynomieller Zeit berechnet werden.

Zeige:

(a) Es gibt eine Paddingfunktion für SAT

(b) Wenn $L' \leq_p L$ und es eine Padding-Funktion für L gibt, dann gibt es eine injektive Reduktion f von L' auf L mit f^{-1} berechenbar in polynomieller Zeit.

In einem weiteren Schritt (der hier nicht durchgeführt werden soll) kann man nun beweisen, dass alle NP-vollständigen Probleme L und L' p-isomorph sind wenn sie (beide!) Paddingfunktionen besitzen.

Aufgabe 4: 25%

Betrachte die Sprache

$$U_E = \{(\mu_M, w, k) \mid \text{ Wort } \mu_M \text{ kodiert DTM, die Eingabe } w \text{ in } k \text{ Schritten akzeptiert}\}.$$

und beweise, dass sie ExpTime-vollständig ist (also nicht in P).

Hinweis: Die Eingabekomponente k ist natürlich *binär* kodiert.

Aufgabe 5: 25% (Zusatzaufgabe)

Für $A \subseteq \mathbb{N}$ verwenden wir die Unärdarstellung $\mathsf{UN}(A) := \{1^n \mid n \in A\}$ und die Binärdarstellung $\mathsf{BIN}(A) := \{\mathsf{bin}(n) \mid n \in A\}$. Zeige, dass für alle $A \subseteq \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathsf{UN}(A) \in \mathsf{P} \text{ gdw. } \mathsf{BIN}(A) \in \mathsf{DTIME}(2^{\mathcal{O}(n)}).$$

Hinweis: Man soll Unär- und Binärdarstellung ja wechselseitig umwandeln können.