AG Theorie der künstlichen Intelligenz
FB Mathematik und Informatik, Universität Bremen
Prof. Dr. Carsten Lutz

Cartesium 2.59
clu@uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-64431

2. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Logik“

Aufgabe 1: 25%

Wende den Algorithmus aus der Vorlesung an, um die Erfüllbarkeit folgender Horn-Formeln zu entscheiden. Im Fall von Erfüllbarkeit gib ein minimales Modell für die Formel an.

(a) $(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_4) \wedge x_1 \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$.

(b) $(\neg x_1 \vee \neg x_4) \wedge x_1 \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee x_5) \wedge x_2 \wedge (x_2 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5)$.

Aufgabe 2: 25%

Beweise die folgenden Aussagen:

(a) Eine DNF-Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Disjunkt ohne Literale der Form x, $\neg x$ enthält.

(b) Eine KNF-Formel ist genau dann gültig, wenn jedes Konjunkt zwei Literale der Form x, $\neg x$ enthält.

(c) $\psi \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \models \varphi$.

(d) $\varphi \models \psi$ gilt genau dann, wenn $\varphi \rightarrow \psi$ gültig ist.

(e) φ ist gültig genau dann, wenn $1 \models \varphi$.

Aufgabe 3: 25%

(a) Wende Resolution an, um für die folgende Formel zu entscheiden, ob sie erfüllbar ist (berechne also die Menge $\mathsf{Res}^*(M)$ für eine geeignete Klauselmenge M):

$$(x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_4 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

Gib im Fall von Unerfüllbarkeit einen Resolutionsbeweis für $\Box$ an.

(b) Verwende den Polyzeit-Algorithmus für Erfüllbarkeit von Hornformeln um festzustellen, ob die Formel

$$x_1 \wedge (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_1 \wedge x_4 \rightarrow x_3) \wedge (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \rightarrow 0) \wedge x_4$$

erfüllbar ist. Verifiziere dein Ergebnis durch Berechnen von $\mathrm{ERes}^*(M)$ für eine geeignete Klauselmenge M.

Aufgabe 4: 25%

(a) Gib Hornklauselmengen $M_0, M_1, M_2, \ldots$ an, so dass die Größe von M_n polynomiell in n beschränkt ist, die Größe von $\mathrm{ERes}^*(M_n)$ aber exponentiell in n ist.

(b) Um einen Polynomialzeitalgorithmus aus dem Resolutionssatz für Einheitsresolution abzuleiten, modifizieren wir die Funktion ERes. Dafür legen wir eine lineare Ordnung $<$ auf den Variablen fest, d. h. $x_1 < x_2 < \cdots$. Eine Klausel C ist eine *minimale Einheitsresolvente von* M, wenn

- sie eine Einheitsresolvente von zwei Klauseln C_1, C_2 aus M ist mit $C_1 = \{x_i\}$, und
- es kein $\neg x_j \in C_2$ gibt mit $x_j < x_i$.

Wir definieren nun die Funktion OERes durch

$$\mathrm{OERes}(M) := M \cup \{C \mid C \text{ minimale Einheitsresolvente von } M\}$$

und definieren $\mathrm{OERes}^i(M)$ sowie $\mathrm{OERes}^*(M)$ analog zu $\mathrm{Res}^i(M)$ und $\mathrm{Res}^*(M)$ aus der Vorlesung. Man kann leicht zeigen, dass der Resolutionssatz für Einheitsresolution auch für die modifizierte Funktion OERes^* gilt.

Zeigen Sie, dass $|\mathrm{OERes}^*(M)|$ polynomiell von $|M|$ abhängt und dass auch die Berechnung von $\mathrm{OERes}^*(M)$ in Polynomialzeit möglich ist.

Aufgabe 5: 25% (Zusatzaufgabe)

Zeige, dass sich jede Formel φ in polynomieller Zeit in eine Formel ψ in KNF transformieren lässt, so dass gilt: φ ist erfüllbar genau dann, wenn ψ erfüllbar ist.

Hinweis: Da die Transformation in polynomieller Zeit stattfinden soll, kann ψ natürlich auch nur polynomiell länger sein als φ. Wie in der Vorlesung gezeigt (Paritätsfunktion), kann ψ daher im allgemeinen nicht äquivalent zu φ sein. Es ist notwendig, zusätzliche Variablen einzuführen. Teilformeln spielen eine Rolle.