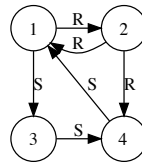


3. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Logik“

Aufgabe 1: 28%

Gegeben sei die folgende Struktur \mathfrak{A} , wobei R und S binäre Relationssymbole sind:



(a) Gib für jeden der folgenden Sätze φ_i an, ob $\mathfrak{A} \models \varphi_i$. (12%)

- (i) $\varphi_1 = \forall x \exists y (R(x, y) \vee S(x, y))$
- (ii) $\varphi_2 = \exists y \forall x (R(x, y) \vee S(x, y))$
- (iii) $\varphi_3 = \exists x \exists y \exists z \exists u (R(x, y) \wedge R(y, z) \wedge R(z, u) \wedge R(u, x))$
- (iv) $\varphi_4 = \forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow x = z)$

(b) Gib eine Formel $\varphi(x)$ an so dass (16%)

- (i) $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi(x)$ genau dann, wenn $\beta(x) \in \{1, 2\}$
- (ii) $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi(x)$ genau dann, wenn $\beta(x) \in \{2, 3\}$

Aufgabe 2: 24%

Betrachte die Struktur $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ aus der Vorlesung. Gib FO-Sätze an, die die folgenden Aussagen beschreiben:

- (a) für alle natürlichen Zahlen n gilt: es gibt eine Primzahl zwischen n und $2n$ (Satz von Bertrand);
- (b) jede ungerade Zahl größer 1 ist Summe von fünf oder weniger Primzahlen (Satz von T. Tao);
- (c) es gibt beliebig große Abstände zwischen aufeinanderfolgenden Primzahlen.

Die in der Vorlesung eingeführten Abkürzungen $\text{Prim}(x)$ und $x > y$ dürfen verwendet werden. Werden zusätzliche Abkürzungen verwendet, so müssen diese auch definiert werden.

Aufgabe 3: 24%

Betrachte nochmals die Struktur \mathfrak{A} aus Aufgabe 1. Verwende den Auswertungsalgorithmus für Prädikatenlogik, um zu entscheiden, ob folgende Modellbeziehungen gelten:

- (a) $\mathfrak{A}, \beta_1 \models \exists x R(x, y)$ mit $\beta_1(y) = 1$
- (b) $\mathfrak{A}, \beta_2 \models \forall y (R(x, y) \vee S(x, y))$ mit $\beta_2(x) = 2$

Aufgabe 4: 24%

Das *Spektrum* eines FO-Satzes φ ist die Menge aller natürlichen Zahlen n , so dass φ ein Modell mit einem Universum der Größe n besitzt. Zeige:

- (a) \emptyset und $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ sind jeweils das Spektrum eines FO-Satzes
- (b) $\{2\}$ ist das Spektrum eines FO-Satzes.
- (c) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\}$ ist das Spektrum eines FO-Satzes.

Die Sätze dürfen über einer beliebigen Signatur formuliert sein.

Aufgabe 5: 25% (Zusatzaufgabe)

Ein *Baum* hat die Form $B = (V, w, <)$. Dabei ist V die (endliche oder unendliche) Knotenmenge, $w \in V$ die *Wurzel* von B und $< \subseteq V \times V$ die Nachfolgerrelation. Ein *Pfad* in B ist eine (endliche oder unendliche) Folge von Knoten v_0, v_1, \dots so dass $v_0 = w$ und $v_i < v_{i+1}$ für alle $i \geq 0$. Für jeden Knoten $v \in V$ muss es in B genau einen Pfad von w nach v geben.

Königs Lemma. Sei $B = (V, <)$ ein Baum mit unendlich vielen Knoten in dem jeder Knoten nur endlich viele Nachfolger hat, also $\{v' \in V \mid v < v'\}$ eine endliche Menge ist für jedes $v \in V$. Dann gibt es einen unendlichen Pfad in B .

Beweise Königs Lemma durch Anwendung des Kompaktheitssatzes der Aussagenlogik. Verwende dabei eine unendliche Formelmengemenge Γ der folgenden Art:

- Für jeden Knoten $v \in V$ gibt es eine Variable x_v .
- Sei $V_i = \{v \in V \mid w <^i v\}$ die Menge aller Knoten in B mit Abstand i zur Wurzel. Man zeigt leicht, dass V_i endlich und nicht leer ist für jedes $i \geq 0$ (diese Aussage darf verwendet werden)
- Wähle Γ derart, dass jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar ist und dass Γ genau dann erfüllbar ist, wenn B einen unendlichen Pfad besitzt.