AG Theorie der künstlichen Intelligenz
FB Mathematik und Informatik, Universität Bremen
Prof. Dr. Carsten Lutz

Cartesium 2.59
clu@uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-64431

4. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Logik“

Aufgabe 1: 25%

Wir betrachten ein Datenbankschema mit den Relationen “Film”, “Schauspieler” und “Programm”. Dabei soll Film die Attribute (Titel, Jahr, Regisseur) haben, Schauspieler die Attribute (Film, Name) und Programm die Attribute (Film, Kino, Uhrzeit). Eine Beispielinstanz für dieses Schema ist:

Titel	Jahr	Regisseur
The Social Network	2010	David Fincher
...		

Film	Name
The Social Network	Jesse Eisenberg
The Social Network	Justin Timberlake
...	

Filmtitel	Kino	Uhrzeit
The Social Network	Cinemaxx	16:00
The Social Network	Schauburg	20:15
...		

Formuliere FO-Formeln (mit freien Variablen), die folgende Antwortmengen liefern:

(a) Regisseure, die auch Schauspieler sind.

(b) Regisseure, die in ihren eigenen Filmen mitgespielt haben.

(c) Filme, die im selben Kino zu mindestens zwei Uhrzeiten gezeigt werden.

(d) Filme, in denen nur ein einziger Schauspieler mitspielt.

(e) Paare (r, z) von Regisseuren und Uhrzeiten, zu denen ein Film dieses Regisseurs gezeigt wird.

Formuliere zusätzlich einen FO-Satz, der genau dann zu 1 auswertet, wenn es ein Kino gibt, das Filme unterschiedlicher Regisseure zeigt.

Aufgabe 2: 25%

Bringe die folgenden Formeln mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren in Pränex-Normalform:

(a) $\exists x \neg \forall y \exists z (R(x,x) \to \exists y \forall z (R(z,z) \land T(y,y))) \lor \neg \forall y \forall z \neg T(z,z)$

(b) $\neg(\forall x \neg(R(x,y) \land \exists y(\neg \forall z(R(z,z) \land T(y)))) \to Q(x)) \lor \forall y \exists z((Q(z) \lor T(y)) \to \exists x R(x,x))$

Aufgabe 3: 25%

Ein FO-Satz ist in *Skolemform* wenn er in Pränex-Normalform (PNF) ist und keine Existenzquantoren enthält. Ein gegebener Satz $\varphi = Q_1 x_1 \cdots Q_k x_k \psi$ in PNF kann (in polynomieller Zeit) in einen Satz $skol(\varphi)$ in Skolemform gewandelt werden, indem erschöpfend

$$\forall x_1 \cdots \forall x_{i-1} \exists x_i Q_{i+1} x_{i+1} \cdots Q_k x_k \, \psi \qquad \text{ersetzt wird durch} \qquad \forall x_1 \cdots \forall x_{i-1} Q_{i+1} x_{i+1} \cdots Q_k x_k \, \psi'$$

wobei man ψ' aus ψ erhält, indem die Variable x_i durch den Term $f(x_1, \dots, x_{i-1})$ ersetzt wird; dabei ist f ein (in jedem Schritt) neu eingeführtes Funktionssymbol.

(a) Wandle folgende Formel in Skolemform: $\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4 \,(R(x_1, x_3) \to P(x_2) \lor Q(x_4))$.

(b) Beweise oder widerlege, dass für alle FO-Sätze φ gilt:

  (i) φ ist äquivalent zu $skol(\varphi)$

  (ii) φ ist erfüllbar gdw. $skol(\varphi)$ erfüllbar ist.

Aufgabe 4: 25%

Beweise oder widerlege:

(a) Wenn T_1 und T_2 FO-Theorien sind, dann ist auch $T_1 \cup T_2$ eine FO-Theorie.

(b) Wenn T_1 und T_2 FO-Theorien sind, dann ist auch $T_1 \cap T_2$ eine FO-Theorie.

(c) Wenn T eine FO-Theorie ist, dann ist auch $\{\neg\varphi \mid \varphi \in T\}$ eine FO-Theorie.

(d) Wenn T eine vollständige Theorie ist, dann ist $\varphi \lor \psi \in T$ genau dann, wenn $\varphi \in T$ oder $\psi \in T$.

(e) Sei T eine beliebige FO-Theorie. Dann gilt $\forall x\,(x = x) \in T$.

Aufgabe 5: 25% (Zusatzaufgabe)

Beweise, dass das Erfüllbarkeitsproblem der Logik erster Stufe entscheidbar ist, wenn man nur unäre Relationssymbole und keine Funktionssymbole zulässt. Nimm der Einfachheit halber an, dass Gleichheit ebenfalls nicht zugelassen ist.

Verfahre wie folgt:

(a) Zeige zunächst, dass jede erfüllbare Formel, in der n verschiedene Relationssymbole vorkommen, ein Modell der Größe höchstens 2^n hat (starte mit einem beliebig großen Modell und stelle daraus ein Modell der gewünschten Größe her).

(b) Argumentiere dann mit Hilfe eines Aufzählargumentes, dass aus der Existenz dieser Modelle wie gewünscht Entscheidbarkeit folgt.