

6. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Logik“

Aufgabe 1: 20%

Gib für die folgenden Eigenschaften definierende SO-Sätze an. Die Signatur ist jeweils $\tau = \{E\}$ mit E binärem Relationssymbol, das die Kanten im Graph beschreibt. Es darf angenommen werden, dass E in allen betrachteten Strukturen eine symmetrische Relation ist (was der Ungerichtetheit der Graphen entspricht).

- (a) 3-Färbbarkeit (Definition analog zu 4-Färbbarkeit im Kapitel über Aussagenlogik).
- (b) Hamiltonizität (also: der Graph hat einen Hamiltonkreis).

Aufgabe 2: 30%

Gib für die folgenden Sprachen $L \subseteq \Sigma_1^*$ mit $\Sigma_1 = \{0, 1\}$ jeweils einen S1S-Satz φ an, so dass $L = L(\varphi)$.

- (a) $(001)^*$
- (b) $(1 + 10)^*$

SIS^+ bezeichne die Erweiterung von S1S um Quantifizierung über Relationsvariablen beliebiger Stelligkeit. Zeige:

- (c) Es gibt einen SIS^+ Satz φ mit $L(\varphi) = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$.

Aufgabe 3: 30%

- (a) Bringe den folgenden S1S-Satz in die Normalform aus dem Beweis des Theorems von Büchi-Elgot-Trakhtenbrot:

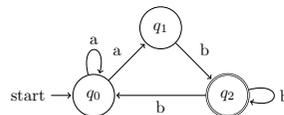
$$\forall x (x > 0 \rightarrow (P_1(x)))$$

- (b) Konstruiere den endlichen Automaten A_φ für

$$P_1 \subseteq P_2 \wedge \exists X (P_1 \subseteq X \wedge succ(X) = P_2)$$

und gib $L(A_\varphi)$ an. Verwende als Kodierung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = d$.

- (c) Gib für den folgenden nichtdeterministischen endlichen Automaten die entsprechende MSO-Formel aus dem Beweis des Theorems von Büchi-Elgot-Trakhtenbrot an:



Aufgabe 4: 20%

Entscheide für die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\{a, b\}$, ob sie sternfrei sind. Falls ja, gib eine sternfreie Beschreibung an. Ansonsten begründe kurz.

- (a) $(a + b)^* b (a + b)^*$
- (b) a^*
- (c) $(aa)^*$
- (d) $(ab^+)^*$

Aufgabe 5: 20% (Zusatzaufgabe)

Betrachte die folgende Menge von Aussagenvariablen: pay, getcoffee, gettea. Finde LTL-Formeln, die die folgenden Eigenschaften ausdrücken:

- (a) Nach dem Bezahlen bekommt man schließlich Kaffee oder Tee (aber nicht unbedingt zum unmittelbar nächsten Zeitpunkt);
- (b) Die Nachfrage endet nie, sowohl an Kaffee als auch an Tee;
- (c) Nach dem Bezahlen und vor dem Erhalt von Kaffee oder Tee ist es nicht möglich, nochmal zu bezahlen;
- (d) Man bekommt keinen Kaffee oder Tee, ohne vorher bezahlt zu haben (und es wird pro Bezahlvorgang höchstens ein Kaffee oder Tee ausgegeben).

Beachte: es ist natürlich jeweils 'zu jedem Zeitpunkt' gemeint, in Aufgabe (a) also: wenn man zu einem beliebigen Zeitpunkt bezahlt, bekommt man schließlich Kaffee oder Tee.