Prof. Dr. Thomas Schneider WS 2015/16

Logik

Übungsblatt 1

Abgabe am 21. 10. zu Beginn der Übung

---

1. (40 %)

Johanna und Joel haben fünf Kinder: Anna, Bert, Chris, David und Eva. Gegeben sind die folgenden sechs Aussagen:

1. Eva sagt: „Unter Anna, Chris und David befindet sich mindestens ein Lügner."
2. Anna sagt: „Bert lügt nur dann, wenn David die Wahrheit sagt."
3. Bert sagt: „Wenn Chris nicht lügt, dann ist entweder Anna oder David ein Lügner."
4. Chris sagt: „Eva lügt, und auch Anna oder Bert lügen."
5. David sagt: „Wenn Bert die Wahrheit sagt, dann auch Anna oder Chris."
6. Zwei der Kinder lügen immer, die anderen drei sagen immer die Wahrheit.

Wir wollen das Rätsel hier mit Hilfe von Aussagenlogik lösen.

a) Gib aussagenlogische Formeln $\varphi_1, \dots, \varphi_6$ an, die die beschriebene Situation modellieren (für jede Aussage eine Formel). Verwende für jedes Kind eine aussagenlogische Variable, die angibt, ob das entsprechende Kind lügt, d.h. eine Variable x_a für die Aussage „Anna ist eine Lügnerin".

Hinweis: Die Aussage „Anna sagt, dass Bert ein Lügner ist" kann dann durch folgende aussagenlogische Formel beschrieben werden:

$$(\neg x_a \to x_b) \land (x_a \to \neg x_b)$$

b) Wie viele erfüllende Belegungen hat die Formel φ_6? Gib alle an!

c) Gib eine Belegung V an, die alle Formeln $\varphi_1, \dots, \varphi_6$ erfüllt! In welcher Beziehung steht V zur Lösung des Rätsels?

d) Gibt es weitere Belegungen, die alle Formeln erfüllen? Was folgt daraus über die Eindeutigkeit der Lösung?

2. (ohne Wertung) Wir betrachten das Auswertungsproblem der Aussagenlogik.

a) Gib einen möglichst effizienten Algorithmus (in Pseudocode) zum Auswerten von aussagenlogischen Formeln an. Orientiere Dich an den Hinweisen aus der Vorlesung.

b) Dokumentiere die Arbeitsweise Deines Algorithmus anhand der folgenden Formel φ und Belegung V:

$$\varphi = \neg(\neg(x_1 \land x_2) \lor x_3) \qquad V(x_1) = 0,\ V(x_2) = 1,\ V(x_3) = 1$$

c) Argumentiere, dass der Algorithmus (auf jeder Eingabe) in Polynomialzeit läuft!

Bitte wenden.

3. (30 %) Zeige durch Anwenden der in der Vorlesung eingeführten Äquivalenzen, dass auch die folgenden Äquivalenzen gelten. Gib für jeden Schritt die angewandte Regel an.

a) $(x \lor y) \land (\neg x \lor y) \equiv y$

b) $(x \lor y) \land (\neg x \lor \neg y) \equiv (\neg x \land y) \lor (x \land \neg y)$

c) $0 \land x \equiv 0$ und $1 \lor x \equiv 1$

4. (30 %) Gegeben sei die folgende 3-stellige Boolesche Funktion f mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_2 & \text{falls } x_1 = 0 \\ x_3 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Gib eine aussagenlogische Formel für f in disjunktiver Normalform an.

b) Sei $M = \{f, 0, 1\}$. Zeige, dass M funktional vollständig ist.

c) Zeige, für jede echte Teilmenge $M' \subset M$, dass sie nicht funktional vollständig ist.

5. Zusatzaufgabe (20 %) Betrachte die induktive Definition der Menge $\mathsf{TF}(\varphi)$ aller Teilformeln von φ aus der Vorlesung.

a) Gib eine entsprechende induktive Definition für die Länge $\ell(\varphi)$ von φ an. Dabei sollen atomare Formeln, Junktoren und Klammern jeweils die Länge 1 haben. So soll z. B. die Formel $\varphi = (\neg x \land y)$ die Länge $\ell(\varphi) = 6$ haben.

b) Beweise per Induktion über die Struktur der Formel φ:

$$\text{Für alle aussagenlogischen Formeln } \varphi \text{ gilt } |\mathsf{TF}(\varphi)| \leq \ell(\varphi).$$

Zeige dazu zunächst, dass die Aussage für alle atomaren Formeln gilt (dies ist der Induktionsanfang). Zeige dann: wenn die Aussage für zwei beliebige Formeln φ und ψ gilt, dann gilt sie auch für $\neg\varphi$, für $\varphi \land \psi$ und für $\varphi \lor \psi$ (dies ist der Induktionsschritt; er zerfällt also in drei Fälle).