Prof. Dr. Thomas Schneider WS 2015/16

Logik

Übungsblatt 4

Abgabe am 2. 12. zu Beginn der Übung

---

1. (24 %) Wir betrachten ein Datenbankschema mit den Relationen Film, Schauspieler und Programm. Dabei soll Film die Attribute (Titel, Jahr, Regisseur) haben, Schauspieler die Attribute (Titel, Name) und Programm die Attribute (Titel, Kino, Uhrzeit). Eine Beispielinstanz für dieses Schema ist:

Film

Titel	Jahr	Regisseur
Avatar	2009	J. Cameron
...		

Schauspieler

Titel	Name
Avatar	S. Worthington
Avatar	Z. Saldaña
...	

Programm

Titel	Kino	Uhrzeit
Avatar	Cinemaxx	19:50
Avatar	Schauburg	20:15
...		

Formuliere FO-Formeln (mit freien Variablen), die folgende Antwortmengen liefern:

a) Regisseure, die auch Schauspieler sind

b) Regisseure, die in ihren eigenen Filmen mitgespielt haben

c) Kinos, die mindestens zwei Filme zur selben Uhrzeit zeigen

d) Schauspieler, die in nur einem Film mitspielen

e) Paare (s, k) von Schauspielern und Kinos, die einen Film dieses Schauspielers zeigen

f) Formuliere zusätzlich einen FO-Satz, der genau dann zu 1 auswertet, wenn es einen Schauspieler gibt, der in unterschiedlichen Kinos zu sehen ist.

2. (25 %) Seien φ, ψ beliebige FO-Formeln. Zeige oder widerlege:

a) $\exists x\,(\varphi \vee \psi) \;\equiv\; \exists x\,\varphi \vee \exists x\,\psi$

b) $\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \;\equiv\; \exists x\,\varphi \wedge \exists x\,\psi$

c) $\exists x\,\forall y\,\varphi \;\models\; \forall y\,\exists x\,\varphi$

d) $\forall y\,\exists x\,\varphi \;\models\; \exists x\,\forall y\,\varphi$

e) Der Satz $\forall x_1\,\forall x_2\,\forall y\,\Big(f(x_1) = y \;\wedge\; f(x_2) = y \;\rightarrow\; x_1 = x_2\Big)$ ist gültig.

3. (24 %) Bringe die folgenden Formeln mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren in Pränex-Normalform:

a) $\forall y\,\Big(R(x,y) \rightarrow P(y) \vee \neg\exists x\,\big(S(y,x) \wedge Q(x)\big)\Big)$

b) $\forall x\,\Big(P(x,y) \wedge \forall x\,Q(x,x) \wedge \neg\forall y\,Q(x,y)\Big)$

Bitte wenden.

4. (27 %) Ein FO-Satz ist in *Skolemform*, wenn er in Pränex-Normalform (PNF) ist und keine Existenzquantoren enthält. Einen gegebenen Satz $\varphi = Q_1 x_1 \cdots Q_k x_k \psi$ in PNF kann man (in polynomieller Zeit) in einen Satz $\mathsf{skol}(\varphi)$ in Skolemform wandeln, indem man erschöpfend

$$\forall x_1 \cdots \forall x_{i-1} \, \exists x_i \, Q_{i+1} x_{i+1} \cdots Q_k \, x_k \, \psi \qquad \text{ersetzt durch}$$
$$\forall x_1 \cdots \forall x_{i-1} \, Q_{i+1} x_{i+1} \cdots Q_k x_k \, \psi',$$

wobei man ψ' aus ψ erhält, indem man die Variable x_i durch den Term $f_i(x_1, \ldots, x_{i-1})$ ersetzt; dabei ist f_i ein (in jedem Schritt) neu eingeführtes Funktionssymbol.

a) Wandle folgende Formel in Skolemform: (8 %)

$$\forall x_1 \, \exists x_2 \, \forall x_3 \, \exists x_4 \, \Big(R(x_1, x_3) \to P(x_2) \vee Q(x_4) \Big)$$

b) Beweise oder widerlege, dass für alle FO-Sätze φ gilt:

(i) φ ist äquivalent zu $\mathsf{skol}(\varphi)$ (8 %)

(ii) φ ist erfüllbar gdw. $\mathsf{skol}(\varphi)$ erfüllbar ist. (11 %)

Hinweis: Eine der beiden Aussagen ist wahr, die andere falsch.

5. **Zusatzaufgabe** (25 %)

Beweise, dass das Erfüllbarkeitsproblem der Logik erster Stufe entscheidbar ist, wenn man nur unäre Relationssymbole und keine Funktionssymbole zulässt. Nimm der Einfachheit halber an, dass Gleichheit ebenfalls nicht zugelassen ist.

Hinweis: Beobachte, dass man mit unären Relationssymbolen lediglich einzelne Elemente einer Struktur markieren kann und dass Elemente mit gleicher „Markierung“ ununterscheidbar sind. Gehe dann so vor:

a) Bestimme die Anzahl m möglicher „Markierungen“, wenn eine Struktur n verschiedene unäre Relationssymbole interpretiert.

b) Zeige, dass jeder erfüllbare Satz, in dem n verschiedene Relationssymbole vorkommen, ein Modell der Größe höchstens m hat (starte dazu mit einem beliebigen Modell und stelle daraus ein Modell her, in dem jede „Markierung“ höchstens einmal vorkommt).

c) Argumentiere dann mit Hilfe eines Aufzählarguments, dass aus der Existenz dieser Modelle wie gewünscht Entscheidbarkeit folgt.