
Logik Teil 3: Mehr zur Prädikatenlogik erster Stufe

NEXT



3.1 Sequenzkalkül

3.2 Rekursive Aufzählbarkeit, Kompaktheit,
Sätze von Löwenheim-Skolem

3.3 Ausdrucksstärke,
Grundlagen von Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen

3.4 Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele: Anwendungen

Sequenzenkalkül

Wir betrachten einen Kalkül für Gültigkeit in der Prädikatenlogik.

Motivation:

- rekursive Aufzählbarkeit nachweisen
- einfacher Beweis für das Kompaktheitstheorem in FO

Im Prinzip könnten wir wieder Resolution verwenden
(Grundlage für Theorembeweiser der Logik erster Stufe)

Wir verwenden aber einen technisch einfacheren Ansatz:

Gentzens Sequenzenkalkül

Der Einfachheit halber verzichten wir auf das Gleichheitsprädikat.

Sequenzen

Definition Sequenz

Eine *Sequenz* ist ein Ausdruck der Form $\Gamma \Rightarrow \Delta$, wobei Γ und Δ endliche Mengen von Sätzen sind. Wir nennen

- Γ das *Antezedenz* und
- Δ das *Sukzedenz*.

Die Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist *gültig*, wenn $\bigwedge \Gamma \models \bigvee \Delta$, in Worten:

jedes Modell von $\bigwedge \Gamma$ macht auch mindestens einen Satz aus Δ wahr.

Ist eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ gültig, so schreiben wir $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Beispiele für gültige Sequenzen:

- $\{\forall x P(x), Q(c)\} \Rightarrow \{P(c) \wedge Q(c), R(c, d)\}$
- $\{P(c) \vee Q(d)\} \Rightarrow \{P(c), Q(d)\}$

Sequenzenkalkül

Der Sequenzenkalkül erlaubt, alle gültigen Sequenzen abzuleiten.

Offensichtlich gilt:

- FO-Satz φ ist Tautologie **gdw.** die Sequenz $\emptyset \Rightarrow \{\varphi\}$ gültig ist
- FO-Satz φ ist unerfüllbar **gdw.** die Sequenz $\{\varphi\} \Rightarrow \emptyset$ gültig ist
(denn $\forall \emptyset$ ist unerfüllbar)

Man kann den Sequenzenkalkül also auch als Kalkül zum Ableiten aller **Tautologien** bzw. aller **unerfüllbaren Formeln** ansehen.

Die zentralen Bestandteile des SK



Axiome

Sequenzen, die man ohne Beweis/Herleitung als gültig voraussetzt



Schlussregeln

Im Gegensatz zu Resolution/Hilbert hat der SK recht viele davon:

2 Stück pro Operator \neg , \wedge , \vee , \forall , \exists ,

jeweils für die linke und die rechte Seite von Sequenzen

(positive und negative Form der Regel)

Axiome des SK

Zum Hervorheben von Formeln in Sequenzen schreiben wir

$$\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \text{statt} \quad \Gamma \cup \{\varphi\} \Rightarrow \Delta \cup \{\psi\}$$

Definition Axiome SK

Die *Axiome* des Sequenzenkalküls (SK) sind alle Sequenzen der Form

$$\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \varphi.$$

Axiome sind offensichtlich gültige Sequenzen.

Schlussregeln des SK

$$(\neg \Rightarrow) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg) \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg \varphi}$$

$$(\vee \Rightarrow) \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \vee) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\wedge \Rightarrow) \frac{\Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \wedge) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}$$

$$(\exists \Rightarrow) \frac{\Gamma, \varphi[c] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi(x) \Rightarrow \Delta} \quad \begin{array}{l} c \text{ nicht in} \\ \Gamma, \Delta, \varphi(x) \end{array}$$

$$(\Rightarrow \exists) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \varphi(x)}$$

$$(\forall \Rightarrow) \frac{\Gamma, \varphi[t] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi(x) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[c]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \varphi(x)} \quad \begin{array}{l} c \text{ nicht in} \\ \Gamma, \Delta, \varphi(x) \end{array}$$

Ableitbarkeit im SK

Definition „ableitbare Sequenz“

Die Menge der *ableitbaren* Sequenzen ist die kleinste Menge von Sequenzen, die

- alle Axiome des SK enthält und
- abgeschlossen ist unter Regelanwendung: wenn Instanzen der Sequenzen in der oberen Zeile einer Schlussregel enthalten sind, so auch die entsprechende Instanz der unteren Zeile

Ist eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ableitbar, so schreiben wir: $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$

Dabei bedeutet *Instanz*:

$\Gamma, \Delta, \varphi, \psi$ werden durch konkrete Formeln/Formelmengen ersetzt.

Beispiel

T3.2

SK-Beweise

Definition SK-Beweis

Ein *SK-Beweis* ist ein Baum, dessen Knoten auf folgende Weise mit Sequenzen beschriftet sind:

- Jedes Blatt ist mit einem Axiom beschriftet
- Jeder innere Knoten ist mit einer Instanz der unteren Zeile einer Schlussregel beschriftet
- die Kinder dieses Knotens sind dann genau mit den entsprechenden Instanzen der Sequenzen in der oberen Zeile der Regel beschriftet.

Beachte:

- Jeder innere Knoten hat ein oder zwei Kinder.
- Eine Sequenz ist ableitbar **gdw.** sie als Knotenbeschriftung in einem SK-Beweis auftritt.

Beispiel

T3.3

SK-Beweise

Zur Erinnerung:

In der Sequenz Γ, φ darf Γ auch φ enthalten, muss aber nicht

Darum darf man bei Anwendung von $(\Rightarrow \exists)$ und $(\forall \Rightarrow)$ im SK-Beweis die verwendete Teilformel „**behalten**“:

Beispiel $(\forall \Rightarrow)$:

$$(\forall \Rightarrow) \frac{\Gamma, \varphi[t] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi(x) \Rightarrow \Delta}$$

$$\frac{P(c) \Rightarrow P(c) \wedge P(d)}{\forall x P(x) \Rightarrow P(c) \wedge P(d)}$$

(ohne Behalten)

$$\frac{\forall x P(x), P(c) \Rightarrow P(c) \wedge P(d)}{\forall x P(x) \Rightarrow P(c) \wedge P(d)}$$

(mit Behalten)

Das gilt im Prinzip für alle Regeln, ist aber nur bei $(\Rightarrow \exists)$ und $(\forall \Rightarrow)$ nützlich (und notwendig!)

Korrektheit SK

Theorem (Korrektheit SK)

Wenn $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, dann $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$ (jede ableitbare Sequenz ist gültig).

Beweis:

Es genügt zu zeigen:

1. Alle SK-Axiome sind gültig:

Offensichtlich gilt $\bigwedge \Gamma \models \bigvee \Delta$, wenn es $\varphi \in \Gamma \cap \Delta$ gibt.

2. Wenn eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ durch das Anwenden einer Schlussregel auf gültige Sequenzen entsteht, dann ist $\Gamma \Rightarrow \Delta$ gültig:

Fallunterscheidung: ein Fall pro Regel.

T3.4

Vollständigkeit SK

Theorem (Vollständigkeit SK)

Wenn $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, dann $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ (jede gültige Sequenz ist ableitbar).

Beweisskizze:

(Details im Grädel-Skript)

Man beweist das Kontrapositiv:

wenn $\Gamma \Rightarrow \Delta$ **nicht** ableitbar, dann $\Gamma \Rightarrow \Delta$ **nicht** gültig, also $\bigwedge \Gamma \not\models \bigvee \Delta$.

Also zu zeigen: es gibt Modell \mathfrak{A} für $\Gamma \cup \neg\Delta$, wobei $\neg\Delta = \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Delta\}$

Im Prinzip möchten wir \mathfrak{A} einfach aus Γ „ablesen“;

die Nicht-Ableitbarkeit von $\Gamma \Rightarrow \Delta$ soll sicherstellen, dass $\mathfrak{A} \models \neg\Delta$

Vollständigkeit SK

Theorem (Vollständigkeit SK)

Wenn $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, dann $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ (jede gültige Sequenz ist ableitbar).

„ \mathfrak{A} aus Γ ablesen“: wenn z. B.

$$\Gamma = \{Q_1(c), \neg Q_2(c), \exists x P(x), P(c)\} \quad \Delta = \{Q_2(c), \neg P(c)\}$$

dann ist klar, wie \mathfrak{A} aus Γ abgelesen wird und dass $\mathfrak{A} \models \neg\Delta$.

Das geht aber nicht immer so einfach:

$$\Gamma = \{Q_1(c) \vee Q_2(c), \exists x P(x)\} \quad \Delta = \{\dots\}$$

Man muss darum Γ und Δ erst vervollständigen.

T3.5

Für später: das konstruierte Modell ist **höchstens abzählbar unendlich**.

NEXT



3.1 Sequenzenkalkül

**3.2 Rekursive Aufzählbarkeit, Kompaktheit,
Sätze von Löwenheim-Skolem**

3.3 Ausdrucksstärke,
Grundlagen von Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen

3.4 Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele: Anwendungen

Rekursive Aufzählbarkeit

Theorem (rekursive Aufzählbarkeit)

Für jede rekursiv aufzählbare Signatur τ sind rekursiv aufzählbar:

- die Menge aller Tautologien aus $FO(\tau)$
- die Menge aller *unerfüllbaren* Sätze aus $FO(\tau)$

Beweis:

1. Die Menge aller **Sätze** über Signatur τ ist rekursiv aufzählbar:

- Erzeuge alle Strings über dem Alph. $\{\neg, \wedge, \vee, \exists, \forall, (,), =\} \cup \text{VAR} \cup \tau$.
- Gib diejenigen aus, die ein wohlgeformter FO-Satz sind.

Rekursive Aufzählbarkeit

Theorem (rekursive Aufzählbarkeit)

Für jede rekursiv aufzählbare Signatur τ sind rekursiv aufzählbar:

- die Menge aller Tautologien aus $FO(\tau)$
- die Menge aller *unerfüllbaren* Sätze aus $FO(\tau)$

Beweis:

2. Die Menge aller **SK-Beweise** über Signatur τ ist rekursiv aufzählbar:

- Erzeuge alle Bäume mit max. binärer Verzweigung, deren Knoten mit Strings über dem Alphabet $\{\neg, \wedge, \vee, \exists, \forall, (,), =\} \cup \text{VAR} \cup \tau$ markiert sind.
- Gib diejenigen aus, die SK-Beweise sind.

Rekursive Aufzählbarkeit

Theorem (rekursive Aufzählbarkeit)

Für jede rekursiv aufzählbare Signatur τ sind rekursiv aufzählbar:

- die Menge aller Tautologien aus $FO(\tau)$
- die Menge aller *unerfüllbaren* Sätze aus $FO(\tau)$

Beweis:

3. Die Menge aller **Tautologien** ist rekursiv aufzählbar:

- Erzeuge alle SK-Beweise
- Für alle darin vorkommenden Sequenzen $\emptyset \Rightarrow \{\varphi\}$
gib φ aus

Begründung: φ ist Tautologie gdw. es SK-Beweis für $\emptyset \Rightarrow \{\varphi\}$ gibt
(Korrektheit und Vollständigkeit des SK)

Analog für **unerfüllbare Sätze**: $\{\varphi\} \Rightarrow \emptyset$

Beachte: entscheidend ist hier die *Endlichkeit* von SK-Beweisen.

Rekursive Aufzählbarkeit

Korollar

Wenn τ mind. ein binäres Relationssymbol enthält, ist die Menge der *erfüllbaren* FO(τ)-Formeln *nicht* rekursiv aufzählbar.

Denn: Wären die erfüllbaren Formeln rekursiv aufzählbar, so wäre Erfüllbarkeit entscheidbar:

Um Erfüllbarkeit von φ zu prüfen, zähle simultan die erfüllbaren Formeln und die unerfüllbaren Formeln auf:

erfüllbar

φ_1

φ_2

\vdots

unerfüllbar

ψ_1

ψ_2

\vdots

Nach endlicher Zeit findet man Eingabeformel φ .

Rekursive Aufzählbarkeit

Über endlichen Strukturen kehrt sich die Situation um:

Theorem (Rekursive Aufzählbarkeit, endliche Modelle)

Über endlichen Modellen gilt:

1. die Menge der erfüllbaren Formeln ist rekursiv aufzählbar, für jede aufzählbare Signatur τ
2. die Menge der unerfüllbaren Formeln ist nicht rekursiv aufzählbar, ebensowenig die Menge der Tautologien

Beweis in der Übung.

Theorembeweiser

Rekursive Aufzählbarkeit liefert *Semi-Entscheidbarkeit* für Gültigkeit (und Unerfüllbarkeit):

- wenn Eingabe Tautologie, dann terminiert der Algorithmus nach endlicher Zeit und antwortet „gültig“;
- anderenfalls terminiert der Algorithmus nicht

Auf diesem Prinzip beruhen moderne **Theorembeweiser** wie **Vampire, Paradox, Spass**; allerdings wird ...

- meist Resolution verwendet (mit aufwendigen Optimierungstechniken)
- durch zusätzliche Verfahren in „vielen Fällen“ auch Terminierung auf Nicht-Tautologien erreicht

Kompaktheit

Der Kompaktheitssatz für FO ist wie in der Aussagenlogik formuliert:

Theorem (Kompaktheitssatz)

Für alle Mengen von Sätzen $\Gamma \subseteq \text{FO}$ und Sätze $\varphi \in \text{FO}$ gilt:

1. Γ ist erfüllbar **gdw.** jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar ist.
2. $\Gamma \models \varphi$ **gdw.** endliches $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ existiert mit $\Gamma_f \models \varphi$.

Wichtige Anwendungen:

- Nicht-Ausdrückbarkeitsbeweise von Eigenschaften in FO
- fundamentale modelltheoretische Resultate wie die Sätze von Löwenheim-Skolem

Beweis des Kompaktheitssatzes verwendet Variation des Sequenzenkalküls.

Erweitertes Sequenzenkalkül

Beweis von Kompaktheit erfordert Variation des Sequenzenkalküls:

Anstatt für die Gültigkeit von Sequenzen $\models \Pi \Rightarrow \Delta$ interessiert man sich nun für die **Folgerbarkeit von Sequenzen** aus einer (eventuell unendlichen) **Formelmenge** Γ :

$$\Gamma \models \Pi \Rightarrow \Delta \quad \text{steht für} \quad \Gamma \models \bigwedge \Pi \rightarrow \bigvee \Delta$$

Für eine Menge von Sätzen $\Gamma \subseteq \text{FO}$ erhält man die Γ -*Erweiterung* des SK durch Hinzufügen der Regel

$$(\Gamma\text{-Regel}) \quad \frac{\Pi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Pi \Rightarrow \Delta} \quad \varphi \in \Gamma$$

Theorem (Korrektheit+Vollständigkeit erweiterter SK)

$\Pi \Rightarrow \Delta$ in der Γ -Erweiterung des SK ableitbar **gdw.** $\Gamma \models \Pi \Rightarrow \Delta$

Kompaktheit

Theorem (Kompaktheitssatz)

Für alle Mengen von Sätzen $\Gamma \subseteq \text{FO}$ und Sätze $\varphi \in \text{FO}$ gilt:

1. Γ ist erfüllbar **gdw.** jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar ist.
2. $\Gamma \models \varphi$ **gdw.** endliches $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ existiert mit $\Gamma_f \models \varphi$.

Beweis mittels Γ -Erweiterung des Sequenzenkalküls,
in der also wegen des vorigen Lemmas gilt:

Es gibt SK-Beweis für $\Pi \Rightarrow \Delta$ **gdw.** $\Gamma \models \bigwedge \Pi \rightarrow \bigvee \Delta$

T3.6

Beachte:

Es wird hier eine syntaktische Eigenschaft (Kalkül)
in eine rein semantische (Erfüllbarkeit, Konsequenz) übertragen.

Nutzen der Kompaktheit

Wir nutzen die Kompaktheit zum Beweis einiger wichtiger modelltheoretischer Resultate, die ...

★ ... sich auf die **Größe von Modellen** beziehen:

- **Wie groß** können die Modelle einer gegebenen Formel werden?
- Gibt es Formeln, die nur in **endlichen/unendlichen/abzählbaren/überabzählbaren Modellen** erfüllbar sind?

★ ... uns erste Beobachtungen bezüglich der **Grenzen der Ausdruckstärke** von FO erlauben:

- Kann man eine Eigenschaft wie „**das Modell ist endlich/unendlich/abzählbar/überabzählbar**“ in FO ausdrücken?

Unendliche Modelle

Theorem (unbeschränkte endliche Modelle)

Wenn ein FO-Satz φ **beliebig große endliche Modelle** besitzt (d. h. für jedes $n \geq 0$ gibt es Modell \mathfrak{A} mit $|A| \geq n$), dann hat φ auch ein **unendliches Modell**.

T3.7

Dieses Thm. impliziert eine **Beschränkung der Ausdruckskraft** von FO:

Es gibt keinen FO-Satz φ , so dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw. $|A|$ endlich.

Das heißt: Endlichkeit ist **nicht** FO-ausdrückbar.

Für ein festes n ist „Modellgröße $\leq n$ “ aber natürlich leicht ausdrückbar:

$$\forall x_0 \cdots \forall x_n \left(\bigvee_{0 \leq i < j \leq n} x_i = x_j \right)$$

Löwenheim-Skolem, aufsteigend

Theorem (*Aufsteigender Satz* von Löwenheim-Skolem)

Wenn ein FO-Satz φ ein **unendliches Modell** besitzt,
dann gibt es für jede Menge U ein **Modell \mathfrak{A} von φ mit $|A| \geq |U|$.**

T3.8

Beachte: Die Kardinalität von U ist beliebig!

Es folgt also z. B.:

wenn Γ unendliches Modell hat, dann auch überabzählbares Modell.

(Also ist auch **Abzählbarkeit nicht FO-ausdrückbar.**)

Korollar (Nicht-Standardmodell der Arithmetik)

$\text{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ hat Modelle, die nicht isomorph zu $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ sind.

Man kann sogar zeigen:

die Arithmetik $\text{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ hat abzählbare Nichtstandardmodelle.

Löwenheim-Skolem, absteigend

Das im Vollständigkeitsbeweis des Sequenzenkalküls konstruierte Modell ist endlich oder abzählbar unendlich. Daher gilt:

Theorem (*Absteigender Satz* von Löwenheim-Skolem)

Wenn ein FO-Satz φ ein **Modell** besitzt,
dann hat φ auch ein **endliches oder abzählbar unendliches Modell**.

T3.9

Es gibt also keine FO-Formeln, die nur überabzählbare Modelle haben.

Folgerung: **Überabzählbarkeit nicht FO-ausdrückbar**
(folgt **nicht** aus „Abzählbarkeit nicht FO-ausdrückbar“)

Übersicht Ausdruckbarkeit (bisher)

**Eigenschaft:
Modellgröße ...**

Ausdrückbar?

$\leq n$ ($n \in \mathbb{N}$) ✓ $\forall x_0 \cdots \forall x_n \left(\bigvee_{0 \leq i < j \leq n} x_i = x_j \right)$

$< n, = n, \neq n, \geq n, > n$ ✓ analog

... endlich ✗ Satz über unbeschränkte endl. Modelle

... abzählbar ✗ Satz von Löwenheim-Skolem, aufsteigend

... überabzählbar ✗ Satz von Löwenheim-Skolem, absteigend

3.1 Sequenzenkalkül

3.2 Rekursive Aufzählbarkeit, Kompaktheit,
Sätze von Löwenheim-Skolem

NEXT



**3.3 Ausdrucksstärke,
Grundlagen von Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen**

3.4 Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele: Anwendungen

Eigenschaften und Ausdruckbarkeit

In der Informatik ist die **Analyse der Ausdruckstärke** von FO und anderen Logiken ein sehr wichtiges Thema, z. B.:

- **Zusammenhang „SQL als FO“:**

Kann jede gewünschte Anfrage in SQL/FO ausgedrückt werden?

- **FO in der Verifikation von Soft-/Hardware:**

Welche Systemeigenschaften können in FO beschrieben werden?

- **FO zur Definition von formalen Sprachen** (später)

Welche formalen Sprachen können in FO definiert werden?

Ausdruckbarkeit meist leicht zu zeigen, Nicht-Ausdruckbarkeit schwierig!

Eigenschaften und Ausdruckbarkeit

Statt Anfragen/Systemeigenschaften/Sprachen betrachten wir verallgemeinernd *Eigenschaften von Strukturen*:

Sei R binäres Relationssymbol, T ternäres Relationssymbol

Beispiel 1: die Eigenschaft „ $R^{\mathfrak{A}}$ ist eine Äquivalenzrelation“ ist FO-ausdrückbar:

$$\varphi = \forall x R(x, x) \wedge \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \wedge \\ \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$$

Beispiel 2: ebenso die Eigenschaft „In $T^{\mathfrak{A}}$ sind die ersten beiden Spalten ein Primärschlüssel“:

$$\varphi = \forall x \forall y \forall z \forall z' ((T(x, y, z) \wedge T(x, y, z')) \rightarrow z = z')$$

Eigenschaften und Ausdruckbarkeit

Definition Eigenschaft, Ausdruckbarkeit

Eine *Eigenschaft* ist eine Klasse von Strukturen, die unter Isomorphie abgeschlossen ist.

Eine Eigenschaft P ist *FO-ausdrückbar*, wenn es einen FO-Satz φ gibt, so dass für alle Strukturen \mathfrak{A} gilt: $\mathfrak{A} \in P$ **gdw.** $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Beispiele:

$$P_1 = \{\mathfrak{A} \mid R^{\mathfrak{A}} \text{ ist eine Äquivalenzrelation}\}$$

$$P_2 = \{\mathfrak{A} \mid \text{in } T^{\mathfrak{A}} \text{ sind die ersten beiden Spalten ein Primärschlüssel}\}$$

Eigenschaften, die **nicht** unter Isomorphie abgeschlossen sind,

- sind trivialerweise nicht FO-ausdrückbar und
- „passen nicht zur Philosophie von FO“.

Eigenschaften und Ausdruckbarkeit

Die **Sätze von Löwenheim/Skolem und verwandte Resultate** haben gezeigt, dass folgende Eigenschaften **in FO nicht ausdrückbar** sind:

- **Endlichkeit** von Strukturen
- **Abzählbarkeit / Überabzählbarkeit** von Strukturen

In der Informatik sind aber meist **andere Eigenschaften** relevant.

Im Folgenden: Werkzeuge zur Analyse der Ausdrucksstärke

- *Kompaktheitstheorem*
ist das klassische Werkzeug aus der mathematischen Logik.
- *Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele*
sind ein sehr flexibles Werkzeug, bieten viele Vorteile.

Nicht-Ausdrückbarkeit über Kompaktheit

Zur Erinnerung:

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist *zusammenhängend*, wenn es für alle Knoten $v, v' \in V$ eine Knotenfolge v_1, \dots, v_n gibt, so dass $v = v_1$, $v_n = v'$ und $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $1 \leq i < n$

Ungerichtete Graphen sind nichts anderes als $\{E\}$ -Strukturen, E binäres Relationssymbol, das symmetrisch interpretiert wird.

Wir beweisen die **Nicht-Ausdrückbarkeit von Zusammenhang** mittels Kompaktheit.

Theorem

Zusammenhang von ungerichteten Graphen ist **nicht** FO-ausdrückbar.

T3.10

Nicht-Ausdrückbarkeit über Kompaktheit

Kann man also Zusammenhang auch in SQL nicht ausdrücken?

Leider können wir das **nicht** aus dem vorigen Resultat **folgern**, denn

- Datenbankinstanzen entsprechen *endlichen* Modellen.
- Der Kompaktheitssatz gilt auf endlichen Modellen *nicht!*

T3.11

Der eben geführte Beweis schließt also *nicht* aus,
dass es einen FO-Satz φ gibt,
so dass für alle *endlichen* Strukturen \mathfrak{A} gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{gdw.} \quad \mathfrak{A} \text{ zusammenhängend}$$

➡ **Wir brauchen ein besseres Werkzeug zur Analyse der Ausdrucksstärke!**

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele sind eine elegante Beweistechnik, die es erlaubt, die Nicht-Ausdrückbarkeit von Eigenschaften in FO (und anderen Logiken) nachzuweisen.

Eine für die Informatik besonders wichtige Eigenschaft:

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele funktionieren auf endlichen und unendlichen Modellen gleichermaßen.

Wie wir gesehen haben, gilt das für viele andere Resultate nicht (z. B. Kompaktheit, rekursive Aufzählbarkeit von Tautologien).

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

- Zwei Spielerinnen: *Spoiler* (auch: Herausforderer) und *Duplicator*
- Das Spielbrett besteht aus zwei Strukturen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} (endlich oder unendlich).
- Die Spielerinnen wechseln sich ab; *Spoiler* beginnt.
- Die zu spielende *Rundenzahl* k ist beliebig, aber vorher festgelegt.
- In jeder Runde wählt *Spoiler* zunächst eine Struktur (\mathfrak{A} oder \mathfrak{B}), dann ein Element der gewählten Struktur.
Duplicator antwortet mit einem Element der anderen Struktur.
- Im Prinzip: *Spoiler* möchte zeigen, dass \mathfrak{A} und \mathfrak{B} unterschiedlich sind; *Duplicator*, dass sie gleich sind.
- Die genaue Gewinnbedingung werden wir gleich definieren.

Gewinnbedingung

Der Einfachheit halber arbeiten wir im Folgenden mit *relationalen Signaturen*.

Wenn \mathfrak{A} Struktur und $S \subseteq A$, so ist $\mathfrak{A}|_S$ die *Einschränkung von \mathfrak{A} auf S* :

- das Universum von $\mathfrak{A}|_S$ ist S
- für alle n -stelligen Relationssymbole R :

$$R^{\mathfrak{A}|_S} = \{(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \mid a_1, \dots, a_n \in S\}$$

Definition: partieller Isomorphismus

Seien \mathfrak{A} und \mathfrak{B} τ -Strukturen und $\delta : A \rightarrow B$ eine partielle Funktion mit Definitionsbereich $\text{dom}(\delta)$ und Wertebereich $\text{ran}(\delta)$.

Dann ist δ ein *partieller Isomorphismus*,

wenn δ ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}|_{\text{dom}(\delta)}$ nach $\mathfrak{B}|_{\text{ran}(\delta)}$ ist.

T3.13

Gewinnbedingung

Gewinnerin eines EF-Spiels:

- Angenommen, es wurden alle k Runden gespielt und in Runde i wurden die Elemente $a_i \in A$ und $b_i \in B$ ausgewählt
- Wenn die erreichte Menge

$$\{(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)\}$$

ein partieller Isomorphismus ist, gewinnt *Duplicator*.

- Sonst gewinnt *Spoiler*.

Uns interessiert weniger die Gewinnerin eines einzelnen Spielverlaufs, sondern hauptsächlich die Gewinnerin *bei optimaler Spielweise*.

Gewinnstrategien

- Das Spiel auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ mit k Zügen bezeichnen wir mit $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.
- Eine Spielerin *hat eine Gewinnstrategie* für $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, wenn sie dieses Spiel gewinnen kann, egal, was die Gegnerin tut.
- Gewinnstrategien für $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ kann man anschaulich als *endliche Spielbäume der Tiefe k* darstellen.
- Für *jedes Spiel* $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat *Spoiler oder Duplicator* eine *Gewinnstrategie*.
(Denn das gilt für alle endlichen 2-Personen-Spiele, in denen *kein Unentschieden möglich* ist.)

Beispiele

T3.14

Gewinnstrategien

Beachte:

- Abwechselnde Züge entsprechen **Quantorenalternierungen**.
- Gewinnstrategien für *Spoiler* und *Duplicator* sind **dual**.

Gewinnstrategie *Spoiler*:

\exists Zug *Spoiler*, so dass
 \forall Züge *Duplicator* gilt
 \exists Zug *Spoiler*, so dass
 \dots
 \forall Züge *Duplicator* gilt
 Spiel ist kein part. Isom.

Gewinnstrategie *Duplicator*:

\forall Züge *Spoiler* gilt
 \exists Zug *Duplicator*, so dass
 \forall Züge *Spoiler* gilt
 \dots
 \exists Zug *Duplicator*, so dass
 Spiel ist part. Isom.

Quantorenrang

Wir stellen nun den **Zusammenhang zwischen EF und FO** her.

Die Anzahl der Spielrunden entspricht dabei dem *Quantorenrang*.

Definition Quantorenrang

Der *Quantorenrang* $qr(\varphi)$ einer Formel φ ist die Schachtelungstiefe von Quantoren in φ . Genauer:

- wenn φ ein Atom, dann $qr(\varphi) = 0$
- $qr(\neg\varphi) = qr(\varphi)$
- $qr(\varphi \wedge \psi) = qr(\varphi \vee \psi) = \max\{qr(\varphi), qr(\psi)\}$
- $qr(\exists x \varphi) = qr(\forall x \varphi) = qr(\varphi) + 1$

Beispiel:

$$qr(\exists x (\forall y P(x, y) \vee \exists z \forall y Q(x, y, z))) = 3$$

Ehrenfeucht-Fraïssé-Theorem

Theorem (Ehrenfeucht-Fraïssé)

Seien \mathfrak{A} und \mathfrak{B} τ -Strukturen. Für alle $k \geq 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{B} \models \varphi$ für alle Sätze $\varphi \in \text{FO}(\tau)$ mit $\text{qr}(\varphi) \leq k$
2. *Duplicator* hat Gewinnstrategie für $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Beachte: \mathfrak{A} und \mathfrak{B} können hier endlich oder unendlich sein.

T3.15

Beweisidee:

- per Induktion über k
- Damit die Induktion durchgeht, müssen wir Spiele betrachten, die schon einige Runden gespielt wurden.
- In Punkt 1 müssen wir dann auch freie Variablen betrachten.

Vollständiger Beweis im Skript von Grädel [StudIP]

Mehr zur Prädikatenlogik

- 3.1 Sequenzenkalkül
- 3.2 Rekursive Aufzählbarkeit, Kompaktheit, Sätze von Löwenheim-Skolem
- 3.3 Ausdrucksstärke, Grundlagen von Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen

NEXT



- 3.4 Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele: Anwendungen**

Methodologie-Theorem

Grundlage für Beweise der Nicht-Ausdrückbarkeit mittels EF-Spielen:

Theorem (Methodologie-Theorem)

Sei P eine Eigenschaft. Wenn es für jedes $k \geq 0$ Strukturen $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k$ gibt, so dass

1. $\mathfrak{A}_k \in P$ und $\mathfrak{B}_k \notin P$ und
2. *Duplicator* hat eine Gewinnstrategie für $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k)$,

dann ist P nicht FO-ausdrückbar.

T3.16

Funktioniert auch für jede Strukturklasse \mathcal{K} (z. B. alle endlichen Strukturen), solange die Paare $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k$ aus \mathcal{K} stammen.

Parität

Wichtige Einschränkung: FO kann nicht „unbeschränkt zählen“.

„Beschränktes Zählen“ heißt Zählen bis zu Konstante n , z. B.:

$$\forall x_0 \cdots \forall x_n \left(\bigvee_{0 \leq i < j \leq n} x_i = x_j \right) \quad (\text{„Struktur hat Größe } \leq n \text{“})$$

„Unbeschränktes Zählen“ z. B.:

- FINITE = $\{\mathfrak{A} \mid |A| \text{ ist endlich (aber beliebig groß)}\}$
- EVEN = $\{\mathfrak{A} \mid |A| \text{ ist geradzahlig}\}$
- ODD = $\{\mathfrak{A} \mid |A| \text{ ist ungeradzahlig}\}$

Unendliche Modelle können beliebig zu EVEN/ODD gehören oder nicht.

Theorem

EVEN und ODD sind **nicht FO-ausdrückbar**, weder in der Klasse **aller Strukturen** noch in der Klasse der **endlichen Strukturen** (jeweils über einer beliebigen Signatur τ).

T3.17

Parität

Also kann **auch SQL nicht unbeschränkt zählen**, Parität nicht ausdrücken.

Das gilt natürlich nicht nur für die **Größe des Universums**, z. B.

„finde alle Übungsgruppen mit ungeradzahlig vielen Studierenden“

auch nicht ausdrückbar (in reinem SQL / relation algebra).

Zusammenhang

Schon gesehen:

Zusammenhang von ungerichteten Graphen ist nicht FO-ausdrückbar.

Wir zeigen nun:

Dies gilt auch in der Klasse aller **endlichen** Strukturen (und damit auch für SQL).

Wir wählen ungerichtete Graphen $\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k$ so dass:

- \mathcal{A}_k ein Kreis der Länge 2^k (also zusammenhängend)
- \mathcal{B}_k besteht aus zwei disjunkten Kreisen der Länge 2^k (also nicht zusammenhängend)

Wir müssen zeigen: *Duplicator* hat Gewinnstrategie für $\mathcal{G}_k(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k)$

Skizze

T3.18

Zusammenhang

Für zwei Knoten u, v ist die *Distanz* $d(u, v)$

- die Länge des kürzesten Pfades von u nach v wenn so ein Pfad existiert
- $d(u, v) = \infty$ wenn kein solcher Pfad existiert

Für $\ell \geq 0$ ist die ℓ -*Nachbarschaft* $N_\ell(u) = \{v \in V \mid d(u, v) \leq \ell\}$

Lemma

Duplicator kann $\mathcal{G}_k(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k)$ so spielen, dass nach i Zügen ein Spielstand $\{(a_1, b_1), \dots, (a_i, b_i)\}$ erreicht ist, so dass für $1 \leq j < \ell \leq i$:

$$(*) \quad d(a_j, a_\ell) = d(b_j, b_\ell) \quad \text{oder} \quad d(a_j, a_\ell), d(b_j, b_\ell) > 2^{k-i}$$

T3.19

Korollar

Duplicator hat Gewinnstrategie für $\mathcal{G}_k(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k)$.

T3.20

Zusammenhang

Korollar

Zusammenhang ist **nicht FO-ausdrückbar**, weder in der Klasse **aller Strukturen** noch in der Klasse aller **endlichen Strukturen**.

Erreichbarkeit

Für viele Anwendungen ist es nützlich,
Erreichbarkeit bezüglich einer binären Relation verwenden zu können.

Beispiel SQL:

Datenbank mit Direktverbindungen einer Fluggesellschaft;
Mittels Erreichbarkeit bekommt alle Verbindungen, mit und ohne Umsteigen.

Wichtiges Resultat:

Theorem

Sei E binäre Relation und $\tau = \{E\}$.

Es gibt keinen Satz $\varphi(x, y) \in \text{FO}(\tau)$, der Erreichbarkeit (entlang E) definiert,
d. h. so dass für alle Strukturen $\mathfrak{A} = (A, E^{\mathfrak{A}})$ gilt:

$\mathfrak{A} \models \varphi[a, b]$ **gdw.** es einen Pfad in \mathfrak{A} von a nach b gibt

Erreichbarkeit

Theorem

Sei E binäre Relation und $\tau = \{E\}$.

Es gibt keine Formel $\varphi(x, y) \in \text{FO}(\tau)$, die Erreichbarkeit (entlang E) definiert, d. h. so dass für alle Strukturen $\mathfrak{A} = (A, E^{\mathfrak{A}})$ gilt:

$\mathfrak{A} \models \varphi[a, b]$ **gdw.** es einen Pfad in \mathfrak{A} von a nach b gibt

Beweis:

Angenommen, es gebe eine FO-Formel $\varphi(x, y)$ wie beschrieben.

Dann könnte man den Zusammenhang von ungerichteten Graphen mit dem folgenden Satz ausdrücken:

$$\forall x \forall y \varphi(x, y)$$

Dies widerspricht aber dem vorigen Korollar, dass Zusammenhang nicht FO-ausdrückbar ist.

Auch nicht FO-ausdrückbar z. B.:

- Azyklizität
- Graphen, die ein Baum sind
- Planarität
- k -Färbbarkeit für beliebiges (fixes) $k \geq 2$
- quasi jede algorithmisch interessante Eigenschaft von Graphen
(wir werden in Teil 4 sehen, warum das so ist!)

Zusammenfassung Prädikatenlogik 1. Stufe

Vorteile 😊

Nachteile ☹️

Verwendung

Repräsentation von Strukturen
aus Mathematik & Informatik
Anwendungen: DB, Verifikation

Ausdrucks- vermögen

viel ausdrucksstärker als
Aussagenlogik

Grenzen der Ausdrucksstärke:
unbegrenzt Zählen,
algo. wichtige Graph-Eigenschaften

Berechenbar-/ Entscheidbarkeit

Auswertung entscheidbar;
Tautologien rekursiv aufzählbar

Erfüllbarkeit usw. unentscheidbar
(auch auf endlichen Strukturen)
Erfüllbarkeit nicht semi-entscheidb.

Kalküle

viele, z. B. Sequenzenkalkül

Tools

Theorembeweiser wie
Vampire, Paradox, Spass

Überblick Schlussfolgerungsprobleme

	Auswertungs- problem	Erfüllbarkeits- problem	Gültigkeits- problem	Folgerbarkeits- problem
Horn-Formeln	in Linearzeit	in Polyzeit	in Linearzeit	in Polyzeit
Aussagenlogik	in Linearzeit	NP- vollständig	co-NP- vollständig	co-NP- vollständig
Prädikatenlogik 1. Stufe	PSpace- vollständig	unentscheidbar nicht semi-entsch.	unentscheidbar semi-entsch.	unentscheidbar semi-entsch.
Prädikatenlogik 2. Stufe				