

Logik

Übungsblatt 4

Abgabe am 13.12. zu Beginn der Übung

1. (25 %) Wir betrachten ein Datenbankschema mit den Relationen **Film**, **Schauspieler** und **Programm**. Dabei soll **Film** die Attribute (Titel, Jahr, Regisseur) haben, **Schauspieler** die Attribute (Titel, Name) und **Programm** die Attribute (Titel, Kino, Uhrzeit). Eine Beispielinstantz für dieses Schema ist:

Film			Schauspieler		Programm		
Titel	Jahr	Regisseur	Titel	Name	Titel	Kino	Uhrzeit
Avatar	2009	J. Cameron	Avatar	S. Worthington	Avatar	Cinemaxx	19:50
...			Avatar	Z. Saldaña	Avatar	Schauburg	20:15
				

Formuliere FO-Formeln (mit freien Variablen), die folgende Antwortmengen liefern:

- a) Regisseure, die auch Schauspieler sind
 - b) Schauspieler, die in irgendeinem Film mitgespielt und Regie geführt haben
 - c) Filme, die im selben Kino zu mindestens zwei Uhrzeiten gezeigt werden
 - d) Filme, in denen nur ein einziger Schauspieler mitspielt
 - e) Paare (r, z) von Regisseuren und Uhrzeiten, zu denen ein Film dieses Regisseurs gezeigt wird
 - f) Formuliere zusätzlich einen FO-Satz, der genau dann zu 1 auswertet, wenn es ein Kino gibt, das Filme unterschiedlicher Regisseure zeigt.
2. (25 %) Seien φ, ψ beliebige FO-Formeln. Zeige oder widerlege:
- a) $\forall x \varphi \vee \forall x \psi \models \forall x (\varphi \vee \psi)$
 - b) $\forall x (\varphi \vee \psi) \models \forall x \varphi \vee \forall x \psi$
 - c) $\varphi \wedge \exists x \psi \equiv \exists x (\varphi \wedge \psi)$
 - d) Der Satz $\forall x \exists y (f(y) = x)$ ist gültig.
3. (25 %) Bringe die folgenden Formeln mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren in Pränex-Normalform:
- a) $\forall y \left(R(x, y) \rightarrow P(y) \vee \neg \exists x (S(y, x) \wedge Q(x)) \right)$
 - b) $\forall x \left(P(x, y) \wedge \forall x Q(x, x) \wedge \neg \forall y Q(x, y) \right)$

Bitte wenden.

4. (25 %) In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass zentrale SQL-Entscheidungsprobleme Instanzen bekannter FO-Entscheidungsprobleme sind. Beispielsweise kann man das Problem

Gegeben: Datenbankinstanz \mathfrak{A} , SQL-Anfrage $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, Tupel (a_1, \dots, a_n)
Frage: Ist (a_1, \dots, a_n) eine Antwort auf φ bezüglich \mathfrak{A} ?

ausdrücken als eine Instanz des Auswertungsproblems für FO-Formeln:

Gegeben: \mathfrak{A} , $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, β mit $\beta(x_i) = a_i$ für alle $i \leq n$
Frage: Gilt $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi$?

Damit ist dieses Problem entscheidbar und kann mit dem aus der Vorlesung bekannten Algorithmus gelöst werden.

Drücke die drei SQL-Probleme, die in aus Abschnitt 2.6 (Folie 62) genannt werden, als Instanzen des Erfüllbarkeits- bzw. Folgerbarkeitsproblems für FO aus. Was folgt über ihre Entscheidbarkeit?

5. Zusatzaufgabe (20 %)

Beweise, dass das Erfüllbarkeitsproblem der Logik erster Stufe entscheidbar ist, wenn man nur unäre Relationssymbole und keine Funktionssymbole zulässt. Nimm der Einfachheit halber an, dass Gleichheit ebenfalls nicht zugelassen ist.

Hinweis: Beobachte, dass man mit unären Relationssymbolen lediglich einzelne Elemente einer Struktur markieren kann und dass Elemente mit gleicher „Markierung“ ununterscheidbar sind. Gehe dann so vor:

- Bestimme die Anzahl m möglicher „Markierungen“, wenn eine Struktur n verschiedene unäre Relationssymbole interpretiert.
- Zeige, dass jeder erfüllbare Satz, in dem n verschiedene unäre Relationssymbole vorkommen, ein Modell mit einem Universum der Größe höchstens m hat (starte dazu mit einem beliebigen Modell und stelle daraus ein Modell her, in dem jede „Markierung“ höchstens einmal vorkommt).
- Argumentiere dann mit Hilfe eines Aufzählarguments, dass aus der Existenz dieser Modelle wie gewünscht Entscheidbarkeit folgt.