Logik

Übungsblatt 6

Abgabe am 25. 1. (Mittwoch) zu Beginn der Übung

1. (25 %) Gib für die folgenden Eigenschaften definierende SO-Sätze an. Die Signatur ist jeweils $\tau = \{E\}$ mit einem binären Relationssymbol E, das die Kanten im Graph beschreibt. Es darf angenommen werden, dass E in allen betrachteten Strukturen eine symmetrische Relation ist (was der Ungerichtetheit der Graphen entspricht).

a) 3-Färbbarkeit (Definition analog zu 4-Färbbarkeit im Aussagenlogik-Teil, F. 70)

b) Es gibt eine Teilmenge von höchstens k Knoten, so dass jede Kante des Graphen mit mindestens einem Knoten aus U verbunden ist (*Vertex cover* der Größe k).

2. (25 %)

a) Gib für das Wort $(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1),(1,1,0)$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0,1\}^3$ die entsprechende S1S-Struktur an.

b) Beschreibe die S1S-Strukturen, die der Sprache $L(((0,1)\cdot(1,0))^+)$ entsprechen.

c) Gib für die Sprache $(1+10)^* \subseteq \{0,1\}^*$ einen S1S-Satz φ mit $L \setminus \{\varepsilon\} = L(\varphi)$ an.

d) Sei S1S$^+$ die Erweiterung von S1S um Quantifizierung über Relationsvariablen beliebiger Stelligkeit. Zeige:

Es gibt einen S1S$^+$-Satz φ mit $L(\varphi) = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$.

3. (25 %)

a) Bringe den folgenden S1S-Satz in die Normalform aus dem Beweis des Theorems von Büchi-Elgot-Trakhtenbrot:

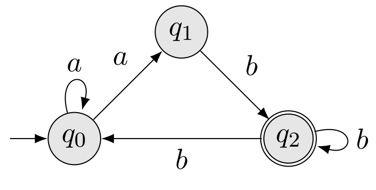
$$\forall x\,(x > 0 \rightarrow P_1(x))$$

b) Konstruiere den endlichen Automaten $\mathcal{A}_\varphi$ für

$$P_1 \subseteq P_2 \ \wedge\ \exists X\,(P_1 \subseteq X \ \wedge\ \mathsf{succ}(X) = P_2)$$

und gib $L(\mathcal{A}_\varphi)$ an mit der Kodierung $\binom{0}{0} = a$, $\binom{0}{1} = b$, $\binom{1}{0} = c$ und $\binom{1}{1} = d$.

c) Gib für den nebenstehenden nichtdeterministischen endlichen Automaten die entsprechende MSO-Formel aus dem Beweis des Theorems von Büchi-Elgot-Trakhtenbrot an.



4. (25 %) Entscheide für die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\{a, b\}$, ob sie sternfrei sind. Falls ja, gib eine sternfreie Beschreibung an. Ansonsten begründe kurz.

a) $(a + b)^*b(a + b)^*$

b) a^*

c) $(aa)^*$

d) $(ab^+)^*$

5. Zusatzaufgabe (20 %) Beweise die Aussage aus der Vorlesung, dass für jede Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A}$ erfüllt die Peano-Axiome zweiter Stufe genau dann, wenn $\mathfrak{A}$ isomorph zur Struktur $(\mathbb{N}, \mathsf{nf}, 0)$ ist.

Hinweise zum Vorgehen:

- Zur Erinnerung die Peano-Axiome zweiter Stufe:

$$\forall x\, \mathsf{nf}(x) \neq 0 \tag{1}$$

$$\forall x \forall y\, (\mathsf{nf}(x) = \mathsf{nf}(y) \to x = y) \tag{2}$$

$$\forall X\, \Big(\big(X(0) \land \forall x\, (X(x) \to X(\mathsf{nf}(x))) \big) \to \forall x\, X(x) \Big) \tag{3}$$

- Für „⇒“ konstruiere eine geeignete Abbildung von $(\mathbb{N}, \mathsf{nf}, 0)$ nach $\mathfrak{A}$ und zeige, dass sie ein Isomorphismus ist; beispielsweise solltest Du Injektivität bzw. Surjektivität zeigen können, indem Du die Erfülltheit von (1) und (2) bzw. (3) benutzt.
- Für „⇐“ kannst Du benutzen, dass das Isomorphielemma auch für die Logik zweiter Stufe gilt, ohne dies gesondert zu beweisen.