

Logik

WiSe 2017/18
Thomas Schneider

Teil 3: Mehr zur Prädikatenlogik 1. Stufe

Homepage der Vorlesung: <http://tinyurl.com/ws1718-logik>

NEXT



3.1 Sequenzenkalkül

- 3.2 Rekursive Aufzählbarkeit, Kompaktheit, Sätze von Löwenheim-Skolem
- 3.3 Ausdrucksstärke, Grundlagen von Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen
- 3.4 Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele: Anwendungen

Sequenzenkalkül

Wir betrachten einen Kalkül für Gültigkeit in der Prädikatenlogik.

Motivation:

- rekursive Aufzählbarkeit nachweisen
- einfacher Beweis für das Kompaktheitstheorem in FO

Im Prinzip könnten wir wieder Resolution verwenden
(Grundlage für Theorembeweiser der Logik erster Stufe)

Wir verwenden aber einen technisch einfacheren Ansatz:

Gentzens Sequenzenkalkül

Der Einfachheit halber verzichten wir auf das Gleichheitsprädikat.

Sequenzen

Definition 3.1 (Sequenz)

Eine *Sequenz* ist ein Ausdruck der Form $\Gamma \Rightarrow \Delta$,
wobei Γ und Δ endliche Mengen von Sätzen sind. Wir nennen

- Γ das *Antezedenz* und
- Δ das *Sukzedenz*.

Die Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist *gültig*, wenn $\bigwedge \Gamma \models \bigvee \Delta$, in Worten:

jedes Modell von $\bigwedge \Gamma$ macht auch mindestens einen Satz aus Δ wahr.

Ist eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ gültig, so schreiben wir $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Beispiele für gültige Sequenzen:

- $\{\forall x P(x), Q(c)\} \Rightarrow \{P(c) \wedge Q(c), R(c, d)\}$
- $\{P(c) \vee Q(d)\} \Rightarrow \{P(c), Q(d)\}$

Sequenzenkalkül

Der Sequenzenkalkül erlaubt, alle gültigen Sequenzen abzuleiten.

Offensichtlich gilt:

- FO-Satz φ ist Tautologie **gdw.** die Sequenz $\emptyset \Rightarrow \{\varphi\}$ gültig ist
- FO-Satz φ ist unerfüllbar **gdw.** die Sequenz $\{\varphi\} \Rightarrow \emptyset$ gültig ist (denn $\bigvee \emptyset$ ist unerfüllbar)

Man kann den Sequenzenkalkül also auch als Kalkül zum Ableiten aller **Tautologien** bzw. aller **unerfüllbaren Formeln** ansehen.

Bestandteile des SK

Die zentralen Bestandteile des SK



Axiome

Sequenzen, die man ohne Beweis/Herleitung als gültig voraussetzt



Schlussregeln

Im Gegensatz zu Resolution/Hilbert hat der SK recht viele davon:

2 Stück pro Operator $\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists$,

jeweils für die linke und die rechte Seite von Sequenzen (positive und negative Form der Regel)

Axiome des SK

Zum Hervorheben von Formeln in Sequenzen schreiben wir

$$\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \text{statt} \quad \Gamma \cup \{\varphi\} \Rightarrow \Delta \cup \{\psi\}$$

Definition 3.2 (Axiome SK)

Die **Axiome** des Sequenzenkalküls (SK) sind alle Sequenzen der Form $\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \varphi$.

Axiome sind offensichtlich gültige Sequenzen.

Schlussregeln des SK

$$(\neg \Rightarrow) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \neg) \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg \varphi}$$

$$(\vee \Rightarrow) \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \vee) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\wedge \Rightarrow) \frac{\Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \wedge) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}$$

$$(\exists \Rightarrow) \frac{\Gamma, \varphi[c] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi(x) \Rightarrow \Delta} \quad \begin{array}{l} c \text{ nicht in} \\ \Gamma, \Delta, \varphi(x) \end{array}$$

$$(\Rightarrow \exists) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \varphi(x)}$$

$$(\forall \Rightarrow) \frac{\Gamma, \varphi[t] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi(x) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \forall) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[c]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \varphi(x)} \quad \begin{array}{l} c \text{ nicht in} \\ \Gamma, \Delta, \varphi(x) \end{array}$$

Definition 3.3 (ableitbare Sequenz)

Die Menge der *ableitbaren* Sequenzen ist die kleinste Menge von Sequenzen, die

- alle Axiome des SK enthält und
- abgeschlossen ist unter Regelanwendung: wenn Instanzen der Sequenzen in der oberen Zeile einer Schlussregel enthalten sind, so auch die entsprechende Instanz der unteren Zeile

Ist eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ableitbar, so schreiben wir: $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$

Dabei bedeutet *Instanz*:

$\Gamma, \Delta, \varphi, \psi$ werden durch konkrete Formeln/Formelmengen ersetzt.

Beispiel

T3.2

Definition 3.4 (SK-Beweis)

Ein *SK-Beweis* ist ein Baum, dessen Knoten auf folgende Weise mit Sequenzen beschriftet sind:

- Jedes Blatt ist mit einem Axiom beschriftet
- Jeder innere Knoten ist mit einer Instanz der unteren Zeile einer Schlussregel beschriftet
- die Kinder dieses Knotens sind dann genau mit den entsprechenden Instanzen der Sequenzen in der oberen Zeile der Regel beschriftet.

Beachte:

- Jeder innere Knoten hat ein oder zwei Kinder.
- Eine Sequenz ist ableitbar **gdw.** sie als Knotenbeschriftung in einem SK-Beweis auftritt.

Beispiel

T3.3

Bereits verwendete Teilformeln „behalten“

Zur Erinnerung:

In der Sequenz Γ, φ darf Γ auch φ enthalten, muss aber nicht

Darum darf man bei Anwendung von $(\Rightarrow \exists)$ und $(\forall \Rightarrow)$ im SK-Beweis die verwendete Teilformel „behalten“:

Beispiel $(\forall \Rightarrow)$: $(\forall \Rightarrow) \frac{\Gamma, \varphi[t] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi(x) \Rightarrow \Delta}$

$$\frac{P(c) \Rightarrow P(c) \wedge P(d)}{\forall x P(x) \Rightarrow P(c) \wedge P(d)} \quad \frac{\forall x P(x), P(c) \Rightarrow P(c) \wedge P(d)}{\forall x P(x) \Rightarrow P(c) \wedge P(d)}$$

(ohne Behalten)

(mit Behalten)

Das gilt im Prinzip für alle Regeln, ist aber nur bei $(\Rightarrow \exists)$ und $(\forall \Rightarrow)$ nützlich (und notwendig!)

Korrektheit SK

Theorem 3.5 (Korrektheit SK)

Wenn $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, dann $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$ (jede ableitbare Sequenz ist gültig).

Beweis:

Es genügt zu zeigen:

1. Alle SK-Axiome sind gültig:

Offensichtlich gilt $\bigwedge \Gamma \models \bigvee \Delta$, wenn es $\varphi \in \Gamma \cap \Delta$ gibt.

2. Wenn eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ durch das Anwenden einer Schlussregel auf gültige Sequenzen entsteht, dann ist $\Gamma \Rightarrow \Delta$ gültig:

Fallunterscheidung: ein Fall pro Regel.

T3.4

Vollständigkeit SK

Theorem 3.6 (Vollständigkeit SK)

Wenn $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, dann $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ (jede gültige Sequenz ist ableitbar).

Beweisskizze: (Details im Grädel-Skript)

Man beweist das Kontrapositiv:

wenn $\Gamma \Rightarrow \Delta$ **nicht** ableitbar, dann $\Gamma \Rightarrow \Delta$ **nicht** gültig, also $\bigwedge \Gamma \not\models \bigvee \Delta$.

Also zu zeigen: es gibt Modell \mathfrak{A} für $\Gamma \cup \neg\Delta$, wobei $\neg\Delta = \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Delta\}$

Im Prinzip möchten wir \mathfrak{A} einfach aus Γ „ablesen“;

die Nicht-Ableitbarkeit von $\Gamma \Rightarrow \Delta$ soll sicherstellen, dass $\mathfrak{A} \models \neg\Delta$

Vollständigkeit SK

Theorem 3.6 (Vollständigkeit SK)

Wenn $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, dann $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ (jede gültige Sequenz ist ableitbar).

„ \mathfrak{A} aus Γ ablesen“: wenn z. B.

$$\Gamma = \{Q_1(c), \neg Q_2(c), \exists x P(x), P(c)\} \quad \Delta = \{Q_2(c), \neg P(c)\}$$

dann ist klar, wie \mathfrak{A} aus Γ abgelesen wird und dass $\mathfrak{A} \models \neg\Delta$.

Das geht aber nicht immer so einfach:

$$\Gamma = \{Q_1(c) \vee Q_2(c), \exists x P(x)\} \quad \Delta = \{\dots\}$$

Man muss darum Γ und Δ erst vervollständigen.

T3.5

Für später: das konstruierte Modell ist **höchstens abzählbar unendlich**.

Mehr zur Prädikatenlogik

3.1 Sequenzenkalkül

NEXT →

3.2 Rekursive Aufzählbarkeit, Kompaktheit, Sätze von Löwenheim-Skolem

3.3 Ausdrucksstärke, Grundlagen von Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen

3.4 Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele: Anwendungen

Rekursive Aufzählbarkeit

Theorem 3.7 (rekursive Aufzählbarkeit)

Für jede rekursiv aufzählbare Signatur τ sind rekursiv aufzählbar:

- die Menge aller Tautologien aus $\text{FO}(\tau)$
- die Menge aller **unerfüllbaren** Sätze aus $\text{FO}(\tau)$

Beweis:

1. Die Menge aller **Sätze** über Signatur τ ist rekursiv aufzählbar:
 - Erzeuge alle Strings über dem Alph. $\{\neg, \wedge, \vee, \exists, \forall, (,), =\} \cup \text{VAR} \cup \tau$.
 - Gib diejenigen aus, die ein wohlgeformter FO-Satz sind.

Rekursive Aufzählbarkeit

Theorem 3.7 (rekursive Aufzählbarkeit)

Für jede rekursiv aufzählbare Signatur τ sind rekursiv aufzählbar:

- die Menge aller Tautologien aus $FO(\tau)$
- die Menge aller *unerfüllbaren* Sätze aus $FO(\tau)$

Beweis:

2. Die Menge aller **SK-Beweise** über Signatur τ ist rekursiv aufzählbar:

- Erzeuge alle Bäume mit max. binärer Verzweigung, deren Knoten mit Strings über dem Alphabet $\{\neg, \wedge, \vee, \exists, \forall, (,), =\} \cup \text{VAR} \cup \tau$ markiert sind.
- Gib diejenigen aus, die SK-Beweise sind.

Rekursive Aufzählbarkeit

Theorem 3.7 (rekursive Aufzählbarkeit)

Für jede rekursiv aufzählbare Signatur τ sind rekursiv aufzählbar:

- die Menge aller Tautologien aus $FO(\tau)$
- die Menge aller *unerfüllbaren* Sätze aus $FO(\tau)$

Beweis:

3. Die Menge aller **Tautologien** ist rekursiv aufzählbar:

- Erzeuge alle SK-Beweise
- Für alle darin vorkommenden Sequenzen $\emptyset \Rightarrow \{\varphi\}$ gib φ aus

Begründung: φ ist Tautologie gdw. es SK-Beweis für $\emptyset \Rightarrow \{\varphi\}$ gibt (Korrektheit und Vollständigkeit des SK)

Analog für **unerfüllbare Sätze**: $\{\varphi\} \Rightarrow \emptyset$

Beachte: entscheidend ist hier die *Endlichkeit* von SK-Beweisen.

Rekursive Aufzählbarkeit

Korollar 3.8

Wenn τ mind. ein binäres Relationssymbol enthält, ist die Menge der *erfüllbaren* $FO(\tau)$ -Formeln *nicht* rekursiv aufzählbar.

Denn: Wären die erfüllbaren Formeln rekursiv aufzählbar, so wäre Erfüllbarkeit entscheidbar:

Um Erfüllbarkeit von φ zu prüfen, zähle simultan die erfüllbaren Formeln und die unerfüllbaren Formeln auf:

erfüllbar	unerfüllbar
φ_1	ψ_1
φ_2	ψ_2
\vdots	\vdots

Nach endlicher Zeit findet man Eingabeformel φ .

Rekursive Aufzählbarkeit

Über endlichen Strukturen kehrt sich die Situation um:

Theorem 3.9 (rekursive Aufzählbarkeit, endliche Modelle)

Über endlichen Modellen gilt:

1. die Menge der erfüllbaren Formeln ist rekursiv aufzählbar, für jede aufzählbare Signatur τ
2. die Menge der unerfüllbaren Formeln ist nicht rekursiv aufzählbar, ebensowenig die Menge der Tautologien

Beweis in der Übung.

Theorembeweiser

Rekursive Aufzählbarkeit liefert *Semi-Entscheidbarkeit* für Gültigkeit (und Unerfüllbarkeit):

- wenn Eingabe Tautologie, dann terminiert der Algorithmus nach endlicher Zeit und antwortet „gültig“;
- anderenfalls terminiert der Algorithmus nicht

Auf diesem Prinzip beruhen moderne *Theorembeweiser* wie *Vampire*, *Paradox*, *Spass*; allerdings wird ...

- meist Resolution verwendet (mit aufwendigen Optimierungstechniken)
- durch zusätzliche Verfahren in „vielen Fällen“ auch Terminierung auf Nicht-Tautologien erreicht

Kompaktheit

Der Kompaktheitssatz für FO ist wie in der Aussagenlogik formuliert:

Theorem 3.10 (Kompaktheitssatz)

Für alle Mengen von Sätzen $\Gamma \subseteq \text{FO}$ und Sätze $\varphi \in \text{FO}$ gilt:

1. Γ ist erfüllbar **gdw.** jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar ist.
2. $\Gamma \models \varphi$ **gdw.** endliches $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ existiert mit $\Gamma_f \models \varphi$.

Wichtige Anwendungen:

- Nicht-Ausdrückbarkeitsbeweise von Eigenschaften in FO
- fundamentale modelltheoretische Resultate wie die Sätze von Löwenheim-Skolem

Beweis des Kompaktheitssatzes verwendet Variation des Sequenzenkalküls.

Erweiterter Sequenzenkalkül

Beweis von Kompaktheit erfordert Variation des Sequenzenkalküls:

Anstatt für die Gültigkeit von Sequenzen $\models \Pi \Rightarrow \Delta$ interessiert man sich nun für die *Folgerbarkeit von Sequenzen* aus einer (eventuell unendlichen) *Formelmenge* Γ :

$$\Gamma \models \Pi \Rightarrow \Delta \quad \text{steht für} \quad \Gamma \models \bigwedge \Pi \rightarrow \bigvee \Delta$$

Für eine Menge von Sätzen $\Gamma \subseteq \text{FO}$ erhält man die *Γ -Erweiterung* des SK durch Hinzufügen der Regel

$$(\Gamma\text{-Regel}) \quad \frac{\Pi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Pi \Rightarrow \Delta} \quad \varphi \in \Gamma$$

Theorem 3.11 (Korrektheit+Vollständigkeit erweiterter SK)

$\Pi \Rightarrow \Delta$ in der Γ -Erweiterung des SK ableitbar **gdw.** $\Gamma \models \Pi \Rightarrow \Delta$

Kompaktheit

Theorem 3.10 (Kompaktheitssatz)

Für alle Mengen von Sätzen $\Gamma \subseteq \text{FO}$ und Sätze $\varphi \in \text{FO}$ gilt:

1. Γ ist erfüllbar **gdw.** jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar ist.
2. $\Gamma \models \varphi$ **gdw.** endliches $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ existiert mit $\Gamma_f \models \varphi$.

Beweis mittels Γ -Erweiterung des Sequenzenkalküls, in der also wegen des vorigen Lemmas gilt:

$$\text{Es gibt SK-Beweis für } \Pi \Rightarrow \Delta \quad \text{gdw.} \quad \Gamma \models \bigwedge \Pi \rightarrow \bigvee \Delta$$

T3.6

Beachte:

Es wird hier eine syntaktische Eigenschaft (Kalkül) in eine rein semantische (Erfüllbarkeit, Konsequenz) übertragen.

Nutzen der Kompaktheit

Wir nutzen die Kompaktheit zum Beweis einiger wichtiger modelltheoretischer Resultate, die ...

- ★ ... sich auf die **Größe von Modellen** beziehen:
 - **Wie groß** können die Modelle einer gegebenen Formel werden?
 - Gibt es Formeln, die nur in **endlichen/unendlichen/abzählbaren/überabzählbaren Modellen** erfüllbar sind?
- ★ ... uns erste Beobachtungen bezüglich der **Grenzen der Ausdrucksstärke** von FO erlauben:
 - Kann man eine Eigenschaft wie „**das Modell ist endlich/unendlich/abzählbar/überabzählbar**“ in FO ausdrücken?

Unendliche Modelle

Theorem 3.12 (unbeschränkte endliche Modelle)

Wenn ein FO-Satz φ **beliebig große endliche Modelle** besitzt (d. h. für jedes $n \geq 0$ gibt es Modell \mathfrak{A} mit $|A| \geq n$), dann hat φ auch ein **unendliches Modell**.

T3.7

Dieses Thm. impliziert eine **Beschränkung der Ausdrucksstärke** von FO:

Es gibt keinen FO-Satz φ , so dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw. $|A|$ endlich.
Das heißt: Endlichkeit ist **nicht** FO-ausdrückbar.

Für ein festes n ist „Modellgröße $\leq n$ “ aber natürlich leicht ausdrückbar:

$$\forall x_0 \cdots \forall x_n \left(\bigvee_{0 \leq i < j \leq n} x_i = x_j \right)$$

Löwenheim-Skolem, aufsteigend

Theorem 3.13 (Aufsteigender Satz von Löwenheim-Skolem)

Wenn ein FO-Satz φ ein **unendliches Modell** besitzt, dann gibt es für jede Menge U ein **Modell \mathfrak{A} von φ mit $|A| \geq |U|$** .

T3.8

Beachte: Die Kardinalität von U ist beliebig!
Es folgt also z. B.:
wenn Γ unendliches Modell hat, dann auch überabzählbares Modell.
(Also ist auch **Abzählbarkeit nicht FO-ausdrückbar**.)

Korollar 3.14 (Nicht-Standardmodell der Arithmetik)

$\text{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ hat Modelle, die nicht isomorph zu $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ sind.

Man kann sogar zeigen:
die Arithmetik $\text{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ hat abzählbare Nichtstandardmodelle.

Löwenheim-Skolem, absteigend

Das im Vollständigkeitsbeweis des Sequenzenkalküls konstruierte Modell ist endlich oder abzählbar unendlich. Daher gilt:

Theorem 3.15 (Absteigender Satz von Löwenheim-Skolem)

Wenn ein FO-Satz φ ein **Modell** besitzt, dann hat φ auch ein **endliches oder abzählbar unendliches Modell**.

T3.9

Es gibt also keine FO-Formeln, die nur überabzählbare Modelle haben.

Folgerung: **Überabzählbarkeit nicht FO-ausdrückbar**
(folgt **nicht** aus „Abzählbarkeit nicht FO-ausdrückbar“)

Übersicht Ausdrückbarkeit (bisher)

Eigenschaft: Modellgröße ...	Ausdrückbar?
$\leq n$ ($n \in \mathbb{N}$)	✓ $\forall x_0 \dots \forall x_n \left(\bigvee_{0 \leq i < j \leq n} x_i = x_j \right)$
$< n, = n, \neq n, \geq n, > n$	✓ analog
... endlich, ... unendlich	✗ Satz über unbeschränkte endl. Modelle
... abzählbar	✗ Satz von Löwenheim-Skolem, aufsteigend
... überabzählbar	✗ Satz von Löwenheim-Skolem, absteigend

Mehr zur Prädikatenlogik

- 3.1 Sequenzenkalkül
- 3.2 Rekursive Aufzählbarkeit, Kompaktheit, Sätze von Löwenheim-Skolem
- NEXT** → **3.3 Ausdrucksstärke, Grundlagen von Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen**
- 3.4 Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele: Anwendungen

Eigenschaften und Ausdrückbarkeit

In der Informatik ist die **Analyse der Ausdrucksstärke** von FO und anderen Logiken ein sehr wichtiges Thema, z. B.:

- **Zusammenhang „SQL als FO“:**
Kann jede gewünschte Anfrage in SQL/FO ausgedrückt werden?
- **FO in der Verifikation von Soft-/Hardware:**
Welche Systemeigenschaften können in FO beschrieben werden?
- **FO zur Definition von formalen Sprachen** (später)
Welche formalen Sprachen können in FO definiert werden?

Ausdrückbarkeit meist leicht zu zeigen, Nicht-Ausdrückbarkeit schwierig!

Eigenschaften und Ausdrückbarkeit

Statt Anfragen/Systemeigenschaften/Sprachen betrachten wir verallgemeinernd **Eigenschaften von Strukturen**:

Sei R binäres Relationssymbol, T ternäres Relationssymbol

Beispiel 1: die Eigenschaft „ R^{2l} ist eine Äquivalenzrelation“ ist FO-ausdrückbar:

$$\varphi = \forall x R(x, x) \wedge \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \wedge \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$$

Beispiel 2: ebenso die Eigenschaft „In T^{2l} sind die ersten beiden Spalten ein Primärschlüssel“:

$$\varphi = \forall x \forall y \forall z \forall z' ((T(x, y, z) \wedge T(x, y, z')) \rightarrow z = z')$$

Definition 3.16 (Eigenschaft, Ausdrückbarkeit)

Eine *Eigenschaft* ist eine Klasse von Strukturen, die unter Isomorphie abgeschlossen ist.

Eine Eigenschaft P ist *FO-ausdrückbar*, wenn es einen FO-Satz φ gibt, so dass für alle Strukturen \mathfrak{A} gilt: $\mathfrak{A} \in P$ gdw. $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Beispiele:

$$P_1 = \{\mathfrak{A} \mid R^{\mathfrak{A}} \text{ ist eine Äquivalenzrelation}\}$$

$$P_2 = \{\mathfrak{A} \mid \text{in } T^{\mathfrak{A}} \text{ sind die ersten beiden Spalten ein Primärschlüssel}\}$$

Eigenschaften, die **nicht** unter Isomorphie abgeschlossen sind,

- sind trivialerweise nicht FO-ausdrückbar und
- „passen nicht zur Philosophie von FO“.

Die **Sätze von Löwenheim/Skolem und verwandte Resultate** haben gezeigt, dass folgende Eigenschaften **in FO nicht ausdrückbar** sind:

- **Endlichkeit** von Strukturen
- **Abzählbarkeit / Überabzählbarkeit** von Strukturen

In der Informatik sind aber meist **andere Eigenschaften** relevant.

Im Folgenden: Werkzeuge zur Analyse der Ausdrucksstärke

- *Kompaktheitstheorem*
ist das klassische Werkzeug aus der mathematischen Logik.
- *Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele*
sind ein sehr flexibles Werkzeug, bieten viele Vorteile.

Nicht-Ausdrückbarkeit über Kompaktheit

Zur Erinnerung:

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist *zusammenhängend*, wenn es für alle Knoten $v, v' \in V$ eine Knotenfolge v_1, \dots, v_n gibt, so dass $v = v_1$, $v_n = v'$ und $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $1 \leq i < n$

Ungerichtete Graphen sind nichts anderes als $\{E\}$ -Strukturen, E binäres Relationssymbol, das symmetrisch interpretiert wird.

Wir beweisen die **Nicht-Ausdrückbarkeit von Zusammenhang** mittels Kompaktheit.

Theorem 3.17

Zusammenhang von ungerichteten Graphen ist **nicht** FO-ausdrückbar.

T3.10

Nicht-Ausdrückbarkeit über Kompaktheit

Kann man also Zusammenhang auch in SQL nicht ausdrücken?

Leider können wir das **nicht** aus dem vorigen Resultat **folgern**, denn

- Datenbankinstanzen entsprechen **endlichen** Modellen.
- Das Kompaktheitstheorem gilt auf endlichen Modellen **nicht!**

T3.11

Der eben geführte Beweis schließt also **nicht** aus, dass es einen FO-Satz φ gibt, so dass für alle **endlichen** Strukturen \mathfrak{A} gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{gdw.} \quad \mathfrak{A} \text{ zusammenhängend}$$

➔ **Wir brauchen ein besseres Werkzeug zur Analyse der Ausdrucksstärke!**

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele sind eine elegante Beweistechnik, die es erlaubt, die Nicht-Ausdrückbarkeit von Eigenschaften in FO (und anderen Logiken) nachzuweisen.

Eine für die Informatik besonders wichtige Eigenschaft:

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele funktionieren auf endlichen und unendlichen Modellen gleichermaßen.

Wie wir gesehen haben, gilt das für viele andere Resultate nicht (z. B. Kompaktheit, rekursive Aufzählbarkeit von Tautologien).

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Zwei Spielerinnen: *Spoiler* (auch: Herausforderer) und *Duplicator*

Spielbrett besteht aus zwei Strukturen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} (endlich oder unendlich).

Spielverlauf:

- Die Spielerinnen wechseln sich ab; *Spoiler* beginnt.
- Die zu spielende Rundenzahl k ist beliebig, aber vorher festgelegt.
- In jeder Runde wählt *Spoiler* zunächst eine Struktur (\mathfrak{A} oder \mathfrak{B}), dann ein Element der gewählten Struktur.
Duplicator antwortet mit einem Element der anderen Struktur.

Idee: *Spoiler* möchte zeigen, dass \mathfrak{A} und \mathfrak{B} unterschiedlich sind; *Duplicator*, dass sie gleich sind.

Die genaue Gewinnbedingung werden wir gleich definieren.

T3.12

Gewinnbedingung

Der Einfachheit halber arbeiten wir im Folgenden mit *relationalen Signaturen*.

Wenn \mathfrak{A} Struktur und $S \subseteq A$, so ist $\mathfrak{A}|_S$ die *Einschränkung von \mathfrak{A} auf S* :

- das Universum von $\mathfrak{A}|_S$ ist S
- für alle n -stelligen Relationssymbole R :

$$R^{\mathfrak{A}|_S} = \{(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \mid a_1, \dots, a_n \in S\}$$

Definition 3.18 (partieller Isomorphismus)

Seien \mathfrak{A} und \mathfrak{B} Strukturen und $\delta : A \rightarrow B$ eine partielle Funktion mit Definitionsbereich $\text{dom}(\delta)$ und Wertebereich $\text{ran}(\delta)$.

Dann ist δ ein *partieller Isomorphismus*, wenn δ ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}|_{\text{dom}(\delta)}$ nach $\mathfrak{B}|_{\text{ran}(\delta)}$ ist.

T3.13

Gewinnbedingung

Gewinnerin eines EF-Spiels:

- Angenommen, es wurden alle k Runden gespielt und in Runde i wurden die Elemente $a_i \in A$ und $b_i \in B$ ausgewählt
- Wenn die erreichte Menge $\{(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)\}$ ein partieller Isomorphismus ist, gewinnt *Duplicator*.
- Sonst gewinnt *Spoiler*.

Uns interessiert weniger die Gewinnerin eines einzelnen Spielverlaufs, sondern hauptsächlich die Gewinnerin *bei optimaler Spielweise*.

Gewinnstrategien

- Das Spiel auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ mit k Zügen bezeichnen wir mit $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.
- Eine Spielerin *hat eine Gewinnstrategie* für $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, wenn sie dieses Spiel gewinnen kann, egal, was die Gegnerin tut.
- Gewinnstrategien für $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ kann man anschaulich als **endliche Spielbäume der Tiefe k** darstellen.
- Für **jedes Spiel** $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat *Spoiler oder Duplicator* eine **Gewinnstrategie**.
(Denn das gilt für alle endlichen 2-Personen-Spiele, in denen **kein Unentschieden möglich** ist.)

Beispiele

T3.14

Gewinnstrategien

Beachte:

- Abwechselnde Züge entsprechen **Quantorenalternierungen**.
- Gewinnstrategien für *Spoiler* und *Duplicator* sind **dual**.

Gewinnstrategie *Spoiler*:

\exists Zug *Spoiler*, so dass
 \forall Züge *Duplicator* gilt
 \exists Zug *Spoiler*, so dass

\vdots
 \forall Züge *Duplicator* gilt
 Spiel ist kein part. Isom.

Gewinnstrategie *Duplicator*:

\forall Züge *Spoiler* gilt
 \exists Zug *Duplicator*, so dass
 \forall Züge *Spoiler* gilt

\vdots
 \exists Zug *Duplicator*, so dass
 Spiel ist part. Isom.

Quantorenrang

Wir stellen nun den **Zusammenhang zwischen EF und FO** her.
 Die Anzahl der Spielrunden entspricht dabei dem **Quantorenrang**.

Definition 3.19 (Quantorenrang)

Der **Quantorenrang** $\text{qr}(\varphi)$ einer Formel φ ist die Schachtelungstiefe von Quantoren in φ . Genauer:

- wenn φ ein Atom, dann $\text{qr}(\varphi) = 0$
- $\text{qr}(\neg\varphi) = \text{qr}(\varphi)$
- $\text{qr}(\varphi \wedge \psi) = \text{qr}(\varphi \vee \psi) = \max\{\text{qr}(\varphi), \text{qr}(\psi)\}$
- $\text{qr}(\exists x \varphi) = \text{qr}(\forall x \varphi) = \text{qr}(\varphi) + 1$

Beispiel:

$$\text{qr}(\exists x (\forall y P(x, y) \vee \exists z \forall y Q(x, y, z))) = 3$$

Ehrenfeucht-Fraïssé-Theorem

Theorem 3.20 (Ehrenfeucht-Fraïssé)

Seien \mathfrak{A} und \mathfrak{B} τ -Strukturen. Für alle $k \geq 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{B} \models \varphi$ für alle Sätze $\varphi \in \text{FO}(\tau)$ mit $\text{qr}(\varphi) \leq k$
2. *Duplicator* hat Gewinnstrategie für $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Beachte: \mathfrak{A} und \mathfrak{B} können hier **endlich oder unendlich** sein.

T3.15

Beweisidee:

- per Induktion über k
- Damit die Induktion durchgeht, müssen wir Spiele betrachten, die schon einige Runden gespielt wurden.
- In Punkt 1 müssen wir dann auch freie Variablen betrachten.

Vollständiger Beweis im Skript von Grädel [StudIP]

- 3.1 Sequenzenkalkül
- 3.2 Rekursive Aufzählbarkeit, Kompaktheit, Sätze von Löwenheim-Skolem
- 3.3 Ausdrucksstärke, Grundlagen von Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen
- NEXT** → 3.4 Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele: Anwendungen

Grundlage für Beweise der Nicht-Ausdrückbarkeit mittels EF-Spielen:

Theorem 3.21 (Methodologie-Theorem)

Sei P eine Eigenschaft. Wenn es für jedes $k \geq 0$ Strukturen $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k$ gibt, so dass

1. $\mathfrak{A}_k \in P$ und $\mathfrak{B}_k \notin P$ und
2. *Duplicator* hat eine Gewinnstrategie für $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k)$,

dann ist P nicht FO-ausdrückbar.

T3.16

Funktioniert auch für jede Strukturklasse \mathcal{K} (z. B. alle endlichen Strukturen), solange die Paare $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k$ aus \mathcal{K} stammen.

Parität

Wichtige Einschränkung: FO kann nicht „unbeschränkt zählen“.

„Beschränktes Zählen“ heißt Zählen bis zu Konstante n , z. B.:

$$\forall x_0 \cdots \forall x_n \left(\bigvee_{0 \leq i < j \leq n} x_i = x_j \right) \quad (\text{„Struktur hat Größe } \leq n \text{“})$$

„Unbeschränktes Zählen“ z. B.:

- FINITE = $\{\mathfrak{A} \mid |A| \text{ ist endlich (aber beliebig groß)}\}$
- EVEN = $\{\mathfrak{A} \mid |A| \text{ ist geradzahlig}\}$
- ODD = $\{\mathfrak{A} \mid |A| \text{ ist ungeradzahlig}\}$

Unendliche Modelle können beliebig zu EVEN/ODD gehören oder nicht.

Theorem 3.22

EVEN und ODD sind nicht FO-ausdrückbar, weder in der Klasse aller Strukturen noch in der Klasse der endlichen Strukturen (jeweils über einer beliebigen Signatur τ).

T3.17

Parität

Also kann auch SQL nicht unbeschränkt zählen, Parität nicht ausdrücken.

Das gilt natürlich nicht nur für die Größe des Universums; z. B.

„finde alle Filme mit ungeradzahlig vielen Schauspielern“

ist auch nicht ausdrückbar (in reinem SQL / Relationenalgebra).

Zusammenhang

Schon gesehen:

Zusammenhang von ungerichteten Graphen ist nicht FO-ausdrückbar.

Wir zeigen nun:

Dies gilt auch in der Klasse aller **endlichen** Strukturen (und damit auch für SQL).

Wir wählen ungerichtete Graphen $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k$ so dass:

- \mathfrak{A}_k ein Kreis der Länge 2^k (also zusammenhängend)
- \mathfrak{B}_k besteht aus zwei disjunkten Kreisen der Länge 2^k (also nicht zusammenhängend)

Wir müssen zeigen: *Duplicator* hat Gewinnstrategie für $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k)$

Skizze

T3.18

Zusammenhang

Für zwei Knoten u, v ist die *Distanz* $d(u, v)$

- die Länge des kürzesten Pfades von u nach v wenn so ein Pfad existiert
- $d(u, v) = \infty$ wenn kein solcher Pfad existiert

Für $\ell \geq 0$ ist die ℓ -*Nachbarschaft* $N_\ell(u) = \{v \in V \mid d(u, v) \leq \ell\}$

Lemma 3.23

Duplicator kann $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k)$ so spielen, dass nach i Runden ein Spielstand $\{(a_1, b_1), \dots, (a_i, b_i)\}$ erreicht ist, so dass für $1 \leq j < \ell \leq i$:

$$(*) \quad d(a_j, a_\ell) = d(b_j, b_\ell) \quad \text{oder} \quad d(a_j, a_\ell), d(b_j, b_\ell) > 2^{k-i}$$

T3.19

Korollar 3.24

Duplicator hat Gewinnstrategie für $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k)$.

T3.20

Zusammenhang

Korollar 3.25

Zusammenhang ist **nicht FO-ausdrückbar**, weder in der Klasse **aller Strukturen** noch in der Klasse aller **endlichen Strukturen**.

Erreichbarkeit

Für viele Anwendungen ist es nützlich,

Erreichbarkeit bezüglich einer binären Relation verwenden zu können.

Beispiel SQL:

Datenbank mit Direktverbindungen einer Fluggesellschaft;

Mittels Erreichbarkeit bekommt alle Verbindungen, mit und ohne Umsteigen.

Wichtiges Resultat:

Theorem 3.26

Sei E eine binäre Relation.

Es gibt keine FO-Formel $\varphi(x, y)$, die Erreichbarkeit entlang E definiert, d. h. so dass für alle Strukturen $\mathfrak{A} = (A, E^{\mathfrak{A}})$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a, b] \quad \text{gdw.} \quad \text{es einen } E\text{-Pfad in } \mathfrak{A} \text{ von } a \text{ nach } b \text{ gibt}$$

Beweis benutzt die Nicht-Ausdrückbarkeit von Zusammenhang

Theorem 3.26

Sei E eine binäre Relation.

Es gibt keine FO-Formel $\varphi(x, y)$, die Erreichbarkeit entlang E definiert, d. h. so dass für alle Strukturen $\mathfrak{A} = (A, E^{\mathfrak{A}})$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a, b] \quad \text{gdw.} \quad \text{es einen } E\text{-Pfad in } \mathfrak{A} \text{ von } a \text{ nach } b \text{ gibt}$$

Beweis:

Angenommen, es gebe eine FO-Formel $\varphi(x, y)$ wie beschrieben.

Dann könnte man den Zusammenhang von ungerichteten Graphen mit dem folgenden Satz ausdrücken:

$$\forall x \forall y \varphi(x, y)$$

Dies widerspricht aber Korollar 3.25.



Auch nicht FO-ausdrückbar z. B.:

- Azyklizität
- Graphen, die ein Baum sind
- Planarität
- k-Färbbarkeit für beliebiges (fixes) $k \geq 2$
- quasi jede algorithmisch interessante Eigenschaft von Graphen (wir werden in Teil 4 sehen, warum das so ist!)

Zusammenfassung Prädikatenlogik 1. Stufe

Vorteile ☺

Nachteile ☹

Verwendung	Repräsentation von Strukturen aus Mathematik & Informatik Anwendungen: DB, Verifikation	
Ausdrucksvermögen	viel ausdrucksstärker als Aussagenlogik	Grenzen der Ausdrucksstärke: unbegrenztes Zählen, algo. wichtige Graph-Eigenschaften
Berechenbar-/Entscheidbarkeit	Auswertung entscheidbar; Tautologien rekursiv aufzählbar	Erfüllbarkeit usw. unentscheidbar (auch auf endlichen Strukturen) Erfüllbarkeit nicht semi-entscheidb.
Kalküle	viele, z. B. Sequenzenkalkül	
Tools	Theorembeweiser wie Vampire, Paradox, Spass	

Überblick Schlussfolgerungsprobleme

	Auswertungsproblem	Erfüllbarkeitsproblem	Gültigkeitsproblem	Folgerbarkeitsproblem
Horn-Formeln	in Linearzeit	in Polyzeit	in Linearzeit	in Polyzeit
Aussagenlogik	in Linearzeit	NP-vollständig	co-NP-vollständig	co-NP-vollständig
Prädikatenlogik 1. Stufe	PSPACE-vollständig	unentscheidbar	unentscheidbar	unentscheidbar
Prädikatenlogik 2. Stufe		nicht semi-entsch.	semi-entsch.	semi-entsch.