

## Logik

### Übungsblatt 1

Abgabe bis **Di., 24. 10., 23:59 Uhr** in Stud.IP, Ordner „Abgabe Übungsblatt 1“, als PDF.  
Bitte nur eine Datei pro Gruppe, Lizenz „Selbst verfasstes, nicht publiziertes Werk“.

---

1. (40 %) Die fünf Kinder Anna, Bert, Chris, David und Eva spielen „Ritter und Knappe“. Die Spielregeln sind einfach: jedes Kind ist das ganze Spiel über entweder Ritter oder Knappe. Ritter sagen immer die Wahrheit; Knappen lügen immer. Gegeben sind die folgenden sechs Aussagen:

1. Anna sagt: „Unter Bert, David und Eva befindet sich mindestens ein Knappe.“
2. Bert sagt: „Chris ist nur dann Knappe, wenn Eva Ritter ist.“
3. Chris sagt: „Wenn David Ritter ist, dann ist entweder Bert oder Eva Knappe.“
4. David sagt: „Anna ist Knappe, und auch Bert oder Chris sind Knappe.“
5. Eva sagt: „Wenn Chris Ritter ist, dann auch Bert oder David.“
6. Drei der Kinder sind Ritter, die anderen zwei sind Knappen.

Die Frage ist nun, welche drei Kinder die Ritter sind. Löse dieses Rätsel mit Hilfe von Aussagenlogik:

- a) Gib aussagenlogische Formeln  $\varphi_1, \dots, \varphi_6$  an, die die beschriebene Situation modellieren (für jede Aussage eine Formel). Verwende für jedes Kind eine aussagenlogische Variable, die angibt, ob das entsprechende Kind ein Ritter ist, also z. B. eine Variable  $x_a$  für die Aussage „Anna ist ein Ritter“.

Hinweis: Die Aussage „Anna sagt, dass Bert ein Knappe ist“ kann dann z. B. durch folgende aussagenlogische Formel beschrieben werden:  $(x_a \rightarrow \neg x_b) \wedge (\neg x_a \rightarrow x_b)$

- b) Wie viele erfüllende Belegungen hat die Formel  $\varphi_6$ ? Gib alle an!
- c) Gib eine Belegung  $V$  an, die alle Formeln  $\varphi_1, \dots, \varphi_6$  erfüllt! In welcher Beziehung steht  $V$  zur Lösung des Rätsels?
- d) Gibt es weitere Belegungen, die alle Formeln erfüllen? Was folgt daraus über die Eindeutigkeit der Lösung?

2. (ohne Wertung) Wir betrachten das Auswertungsproblem der Aussagenlogik.

- a) Gib einen möglichst effizienten Algorithmus (in Pseudocode) zum Auswerten von aussagenlogischen Formeln an. Orientiere Dich an den Hinweisen aus der Vorlesung und/oder den Materialien zu Theoretische Informatik 2 (Stud.IP).
- b) Dokumentiere die Arbeitsweise Deines Algorithmus anhand der folgenden Formel  $\varphi$  und Belegung  $V$ :

$$\varphi = \neg(\neg(x_1 \wedge x_2) \vee x_3) \quad V(x_1) = 0, V(x_2) = 1, V(x_3) = 1$$

- c) Argumentiere, dass der Algorithmus (auf jeder Eingabe) in Polynomialzeit läuft!

Bitte wenden.

3. (30 %) Zeige durch Anwenden der in der Vorlesung eingeführten Äquivalenzen, dass auch die folgenden Äquivalenzen gelten. Gehe vor wie im Beispiel auf Folie 21; gib für jeden Schritt die angewandte Regel an.

a)  $(x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow \neg y) \equiv \neg x$       Zur Erinnerung:  $\varphi \rightarrow \psi$  ist eine Abkürzung für  $\neg\varphi \vee \psi$ .

b)  $x \rightarrow (y \rightarrow z) \equiv (x \wedge y) \rightarrow z$

c)  $0 \wedge x \equiv 0$  und  $1 \vee x \equiv 1$

4. (30 %) Gegeben sei die folgende 3-stellige Boolesche Funktion  $f$  mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_2 & \text{falls } x_1 = 0 \\ x_3 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Gib eine aussagenlogische Formel für  $f$  in disjunktiver Normalform an.

b) Sei  $M = \{f, 0, 1\}$ . Zeige, dass  $M$  funktional vollständig ist.

c) Zeige für jede echte Teilmenge  $M' \subsetneq M$ , dass  $M'$  nicht funktional vollständig ist.

### 5. Zusatzaufgabe (20 %)

Sei  $\oplus$  der zweistellige Junktork mit der Bedeutung „exklusives Oder“, dessen Wahrheitstafel auf Folie 30 angegeben ist. Zeige, dass die Menge  $\{\wedge, \vee, \oplus\}$  nicht funktional vollständig ist. Orientiere Dich an der Beweisskizze auf Folie 32.

---

**L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Tipp:** Wenn Ihr beim L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xen ein bestimmtes Symbol sucht, könnt Ihr in `symbols-a4.pdf` nachschauen, die in jeder L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Installation enthalten ist. Die neueste Version ist auch hier online:

<http://www.ctan.org/tex-archive/info/symbols/comprehensive/>

Außerdem kann ich die Webapp `Detexify` sehr empfehlen – sie erspart Euch das Durchblättern der PDF-Datei:

<http://detexify.kirelabs.org/classify.html>