

Logik

Übungsblatt 5

Abgabe bis **Mi., 9. 1., 23:59 Uhr** in Stud.IP, Ordner „Abgabe Übungsblatt 5“, als PDF.
Bitte nur eine Datei pro Gruppe, Lizenz „Selbst verfasstes, nicht publiziertes Werk“.

1. (25 %)

a) Gib jeweils einen SK-Beweis für die folgenden Sequenzen an:

(i) $(\varphi_1 \vee \neg\psi), (\varphi_2 \vee \psi) \Rightarrow \varphi_1, \varphi_2$

(ii) $\neg\exists x P(x) \Rightarrow \forall x \neg P(x)$

(iii) $\forall x R(f(x), x), \forall x \forall y (\neg R(x, y) \vee R(y, y)) \Rightarrow \forall x R(x, x)$

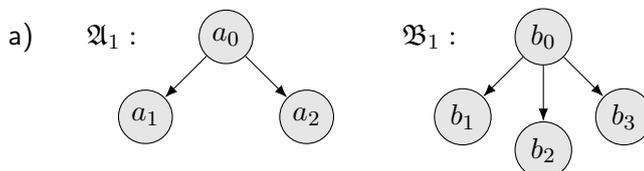
b) Zeige, dass die folgende Sequenz nicht gültig ist:

$$\forall x \forall y \forall z (\neg R(x, y) \vee \neg R(y, z) \vee R(x, z)) \Rightarrow \forall x R(x, x), \forall x \forall y (\neg R(x, y) \vee R(y, x))$$

2. (25 %) Betrachte die Signatur $\tau = \{E\}$ von gerichteten Graphen, wobei E ein binäres Relationssymbol ist, das die Kanten des Graphen repräsentiert. Eine τ -Struktur \mathfrak{A} (also ein Graph) ist *2-färbbar*, wenn man ihre Elemente mit zwei Farben *rot* und *grün* einfärben kann, so dass die Endpunkte jeder Kante unterschiedlich gefärbt sind – d. h., wenn es eine Abbildung $f : A \rightarrow \{r, g\}$ gibt, so dass für alle $(a, b) \in E^{\mathfrak{A}}$ gilt: $f(a) \neq f(b)$. Es ist bekannt (und leicht einzusehen), dass ein Graph 2-färbbar ist gdw. er keinen Kreis ungerader Länge enthält.

Beweise, dass 2-Färbbarkeit keine FO-ausdrückbare Eigenschaft ist. Benutze dazu das Kompaktheitstheorem. Gehe so vor:

- Nimm an, es gebe eine Formel φ , die ausdrückt, dass es keinen Kreis ungerader Länge gibt.
 - Finde eine unendliche Formelmengung Γ mit $\Gamma \models \varphi$ und zeige, dass φ nicht Konsequenz einer endlichen Teilmenge $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ sein kann.
 - Folgere mit dem 2. Teil des Kompaktheitstheorems, dass 2-Färbbarkeit nicht FO-ausdrückbar sein kann.
3. (30 %) Gib für die folgenden Strukturen $\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_i$ das kleinste k an, so dass *Spoiler* eine Gewinnstrategie in k Zügen hat. Gib sowohl die Gewinnstrategie an, als auch einen Satz φ mit $\text{qr}(\varphi) = k$, der in der einen Struktur gilt und in der anderen nicht. Begründe außerdem, dass k die kleinste Zahl mit den genannten Eigenschaften ist.



b) $\mathfrak{A}_2 = (2^{\mathbb{N}}, \subseteq)$ und $\mathfrak{B}_2 = (2^{\{0,1\}}, \subseteq)$ (gemeint sind jeweils die Potenzmengen)

c) $\mathfrak{A}_3 = (\mathbb{Z}, <)$ und $\mathfrak{B}_3 = (\mathbb{R}, <)$

Die Markierungen a_i, b_i sind die Namen der Elemente der Universen, keine Konstanten.

Bitte wenden.

4. (20 %) Zeige, dass
- $Duplicator$ auf den Strukturen $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, <)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, <)$ für alle $k \geq 0$ eine Gewinnstrategie für $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat (verwende, dass beide Ordnungen dicht sind).
 - $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \text{Th}(\mathfrak{B})$ für $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, <)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, <)$ (verwende a)).
5. **Zusatzaufgabe** (20 %) Sei τ eine beliebige endliche Signatur. Im Folgenden sollen alle Strukturen und Sätze stets die Signatur τ verwenden.
- Zeige, dass die Menge aller endlichen Strukturen rekursiv aufzählbar ist.
 - Verwende a) um zu beweisen, dass die Menge aller FO-Sätze, die ein endliches Modell haben, rekursiv aufzählbar ist.
 - Verwende Trakhtenbrots Theorem um zu beweisen, dass die Menge aller FO-Sätze, die kein endliches Modell besitzen, nicht rekursiv aufzählbar ist.

Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Menge der FO-Sätze in der Signatur τ rekursiv aufzählbar ist.