Prof. Dr. Thomas Schneider WS 2018/19

Logik

Übungsblatt 6

Abgabe bis **Do., 24. 1., 23:59 Uhr** in Stud.IP, Ordner „Abgabe Übungsblatt 6", als PDF.
Bitte nur eine Datei pro Gruppe, Lizenz „Selbst verfasstes, nicht publiziertes Werk".

---

1. (25 %) Gib für die folgenden Eigenschaften definierende SO-Sätze an.

a) *Der ungerichtete Graph* $\mathfrak{A} = (A, E^{\mathfrak{A}})$ *ist bipartit.*[1]

Verwende die Signatur $\tau = \{E\}$ mit einem binären Relationssymbol E; es darf angenommen werden, dass E symmetrisch ist (was der Ungerichtetheit der Graphen entspricht).

b) $P^{\mathfrak{A}}$ *und* $Q^{\mathfrak{A}}$ *sind gleichmächtig, d. h. es gibt eine Bijektion zwischen* $P^{\mathfrak{A}}$ *und* $Q^{\mathfrak{A}}$.

Verwende die Signatur $\tau = \{P, Q\}$ mit einstelligen Relationssymbolen P, Q.

c) *Die Größe des Universums* $|A|$ *ist durch 3 teilbar.*

2. (25 %)

a) Gib für das Wort $(1,1,0), (1,0,1), (1,1,1), (1,1,0)$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0,1\}^3$ die entsprechende S1S-Struktur an.

b) Beschreibe die S1S-Strukturen, die der Sprache $L(((0,1) \cdot (1,0))^+)$ entsprechen.

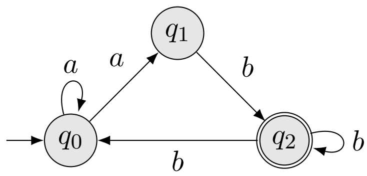
c) Gib für die Sprache $(1 + 10)^+ \subseteq \{0,1\}^*$ einen S1S-Satz φ an, der sie definiert.

d) Sei S1S$^+$ die Erweiterung von S1S um Quantifizierung über Relationsvariablen beliebiger Stelligkeit. Zeige:

Es gibt einen S1S$^+$-Satz φ mit $L(\varphi) = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$.

3. (25 %)

a) Gib für den nebenstehenden nichtdeterministischen endlichen Automaten die entsprechende MSO-Formel aus dem Beweis des Theorems von Büchi-Elgot-Trakhtenbrot an.



b) Bringe den folgenden S1S-Satz in die Normalform aus dem Beweis des Theorems von Büchi-Elgot-Trakhtenbrot:

$$\forall x \, (x > 0 \rightarrow P_1(x))$$

c) Konstruiere den endlichen Automaten $\mathcal{A}_\varphi$ für

$$P_1 \subseteq P_2 \ \wedge \ \exists X \, (P_1 \subseteq X \ \wedge \ \mathsf{succ}(X) = P_2)$$

und gib $L(\mathcal{A}_\varphi)$ an mit der Kodierung $\binom{0}{0} = a$, $\binom{0}{1} = b$, $\binom{1}{0} = c$ und $\binom{1}{1} = d$.

Bitte wenden.

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Bipartiter_Graph

4. (25 %) Entscheide für die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\{a, b\}$, ob sie sternfrei sind. Falls ja, gib eine sternfreie Beschreibung an; sonst begründe kurz.

a) $(a + b)^*b(a + b)^*$

b) a^*

c) $(aa)^*$

d) $(ab^+)^*$

5. Zusatzaufgabe (20 %) Beweise Lemma 4.3 aus der Vorlesung, d. h. für jede Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A}$ erfüllt die Peano-Axiome zweiter Stufe genau dann, wenn $\mathfrak{A}$ isomorph zur Struktur $(\mathbb{N}, \mathsf{nf}, 0)$ ist.

Hinweise zum Vorgehen:

- Zur Erinnerung die Peano-Axiome zweiter Stufe:

$$\begin{aligned}
\alpha_1&: \quad \forall x\, \mathsf{nf}(x) \neq 0 \\
\alpha_2&: \quad \forall x \forall y\, (\mathsf{nf}(x) = \mathsf{nf}(y) \to x = y) \\
\alpha_3&: \quad \forall X\, \Big(\big(X(0) \wedge \forall x\, (X(x) \to X(\mathsf{nf}(x)))\big) \to \forall x\, X(x) \Big)
\end{aligned}$$

- Für „⇒“ konstruiere eine geeignete Abbildung von $(\mathbb{N}, \mathsf{nf}, 0)$ nach $\mathfrak{A}$ und zeige, dass sie ein Isomorphismus ist; beispielsweise solltest Du Injektivität bzw. Surjektivität zeigen können, indem Du die Erfülltheit von α_1 und α_2 bzw. α_3 benutzt.
- Für „⇐“ kannst Du benutzen, dass das Isomorphielemma auch für die Logik zweiter Stufe gilt, ohne dies gesondert zu beweisen.