Prof. Dr. Thomas Schneider

Logik

Fragebogen 10 vom 3. 12.

1. Fasse nochmal die (Un-)Entscheidbarkeitsresultate für die Entscheidungsprobleme in Logik 1. Stufe zusammen. Alle bis auf die mit * markierten Einträge sind direkt als Resultate der Vorlesung formuliert oder folgen unmittelbar.

Entscheidungsproblem	entscheidbar?	auf endlichen Strukturen entscheidbar?	semi-entscheidbar?
Auswertung			
Erfüllbarkeit			*
Gültigkeit			
Konsequenz			*

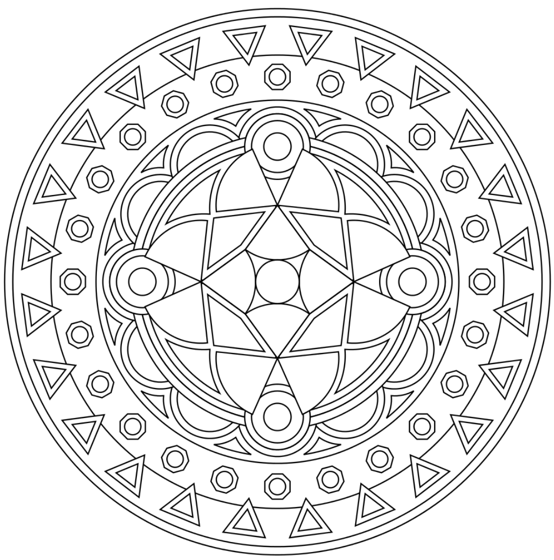
2. Beschreibe die folgenden Theorien in eigenen Worten.

a) $\mathsf{Taut}(\tau)$: die Menge aller Tautologien in der Signatur τ

b) $\mathsf{Th}(\mathfrak{A})$ für gegebene τ-Struktur $\mathfrak{A}$:

c) $\mathsf{Abschluss}(\Omega)$ für gegebene erfüllbare Menge von FO-Sätzen Ω:

d) $\mathsf{Th}(\mathcal{K})$ für gegebene Klasse von τ-Strukturen $\mathcal{K}$:



Unentscheidbarkeit bzgl. endlicher Modelle

Beachte:

Die vorgestellte Reduktion erfordert unendliche Modelle.

In der Informatik benötigt man aber meist nur endliche Modelle (z. B. Datenbanken).

Das liefert unterschiedliche Begriffe von Erfüllbarkeit, Tautologie etc.

Z. B. ist folgende Formel erfüllbar, aber nicht endlich erfüllbar

$$\begin{array}{l} \forall x\, \neg R(x,c) \land \\ \forall x\, \exists y\, R(x,y) \land \\ \forall x \forall x' \forall y\, (\, R(x,y) \land R(x',y) \rightarrow x = x'\,) \end{array}$$

T2.21

Ihre Negation ist also eine Tautologie in endlichen Modellen, aber nicht im Allgemeinen.

Beispiele für FO-Theorien

1. Menge aller Tautologien Taut(τ) (in einer fixen Signatur τ) ist FO-Theorie; enthalten in allen anderen Theorien, nicht vollständig

   T2.22

2. Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur. Dann ist

   $$\text{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \text{ ist } \tau\text{-Satz} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

   eine vollständige FO-Theorie.

3. Wenn Ω erfüllbare Menge von FO-Sätzen, dann ist

   $$\text{Abschluss}(\Omega) = \{\varphi \text{ ist } \tau\text{-Satz} \mid \Omega \models \varphi\}$$

   FO-Theorie (im Allgemeinen nicht vollständig)

4. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von τ-Strukturen. Dann ist

   $$\text{Th}(\mathcal{K}) = \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathcal{K}} \text{Th}(\mathfrak{A})$$

   eine FO-Theorie (im Allgemeinen nicht vollständig).

Charakterisierung der Vollständigkeit

Interessanterweise hängt der Begriff der Vollständigkeit sehr eng mit der Definition von Theorien durch Strukturen zusammen.

Zwei τ-Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ heißen *elementar äquivalent,* wenn für alle Sätze $\varphi \in \text{FO}(\tau)$ gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{A}' \models \varphi$

Lemma 2.30

Sei Γ eine FO-Theorie. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Γ ist vollständig
2. $\Gamma = \text{Th}(\mathfrak{A})$ für eine Struktur $\mathfrak{A}$
3. alle Modelle $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$ von Γ sind elementar äquivalent

T2.23